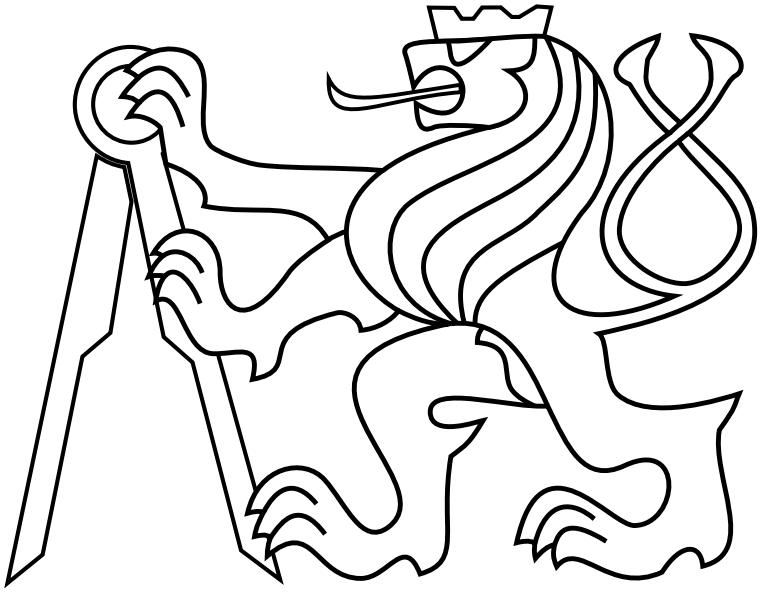
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta elektrotechnická

Bakalářská práce



David Vojna

Řízení nelineárních akustických polí v rezonátorech

Katedra kybernetiky

Vedoucí práce: **doc. Dr. Ing. Michal Bednařík**

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra kybernetiky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: David V o j n a

Studijní program: Kybernetika a robotika (bakalářský)

Obor: Robotika

Název tématu: Řízení nelineárních akustických polí v rezonátorech

Pokyny pro vypracování:

1. Napište numerický kód v jazyce C pro řešení Kuzněcovovy a nehomogenní Burgersovy rovnice popisující nelineární akustické pole v rezonátorech konstantního průřezu vyplněným plynem.
2. Pomocí fázových portrétů nalezněte analytická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice pro uvažované způsoby řízení nelineárních akustických polí (buzení dvěma nezávislými písty, selektivní útlum, multifrekvenční buzení) pro případ ideálního plynu, výsledky porovnejte s výsledky získanými numerickým řešením příslušných modelových rovnic a proveďte jejich rozbor.
   Práce bude zahrnovat nástin odvození příslušných modelových rovnic a bude napsána v LaTeXu.

Seznam odborné literatury:

[1] Enflo, B. O., Hedberg, C. M.: Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids, New York, Kluwer, 2004.
[2] Gusev, V. E. : Build of forced oscillations in acoustic resonators, Sov. Phys. Acoust., 30 (2), 1984, 121-125.
[3] Enflo, B. O., Hedberg, C. M., Rudenko, O. V.:Resonant properties of a nonlinear dissipative layer excited by a vibrating boundary: Q-factor and frequency response, J. Acoust. Soc. Am. 117 (2), 2005, 601-612.
[4] Bednařík, M. Koníček, P.:Asymptotic solutions of the inhomogeneous Burgers equation, J. Acoust. Soc. Am. 115 (1) 2004, 91 - 98.
[5] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery B. P.: Numerical Recipes (3 ed.), Cambridge Univ. Press New York, 2007.
[6] Rudenko, O. V., Soluyan, S. I.: Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics, Consultans Bureau, New York, 1977.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Dr. Ing. Michal Bednařík

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2013/2014

prof. Ing. Vladimír Mařík, DrSc.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan

V Praze dne 10. 1. 2013

Prohlášení autora práce

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 23. 5. 2013 .....

Podpis autora práce

Poděkování

Nejdříve bych chtěl moc poděkovat svému vedoucímu práce, panu doc. Dr. Ing. Michalu Bednaříkovi, obzvláště za ochotu, cenné rady a metodické vedení této bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za duševní i hmotnou podporu během psaní této práce, ale i během celého dosavadního studia. Další poděkování patří mým přátelům, za chvíle rozptýlení nejen při našich společných sportovních aktivitách. A nakonec bych chtěl velmi poděkovat osobě, kterou nazývám Noháč, jenž dokázala můj život, včetně této náročnější fáze, protknout nití nebývalé krásy.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá řízením spektra nelineárních stojatých vln v akustických rezonátorech vyplněných plynem. K tomu účelu je nejprve nastíněno odvození rovnic používaných k modelování nelineárních zvukových vln - Kuzněcovovy rovnice a nehomogenní Burgersovy rovnice. Nehomogenní Burgersova rovnice je použita k nalezení analytického řešení pro případ buzení rezonátoru pouze na jeho prvním rezonančním kmitočtu a dále pro uvažované způsoby řízení nelineárních stojatých vln (selektivní útlum, multifrekvenční buzení, buzení dvěma nezávislými písty) pro případ ideálního plynu. Výsledky jsou porovnány s výsledky získanými numerickým řešením příslušných modelových rovnic a je proveden jejich rozbor.

Abstract

This bachelor thesis deals with control of spectrum of nonlinear standing waves in gas-filled acoustic resonators. For description of the waves model equations are derived - Kuznetsov equation and inhomogeneous Burgers equation. Inhomogeneous Burgers equation is used to find an analytic solution for the case in which the resonator is driven by a piston which oscillates at the resonator's first eigenfrequency. The same equation is used to find analytic solutions for considered control methods (selective attenuation, parametric excitation, excitation using two independent pistons) for the case of ideal gas. The analytic solutions are compared with numerical ones and the efficiency of the considered methods is disscused .

Obsah

1 Úvod **2**

2 Modelové rovnice pro popis nelineárních akustických polí **4**
2.1 Základní modelové rovnice 4
2.2 Kuzněcovova rovnice 5
2.3 Nehomogenní Burgersova rovnice 6

3 Analytická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice **9**
3.1 Bezrozměrný tvar nehomogenní Burgersovy rovnice a její obecné řešení . . 9
3.2 Buzení na prvním rezonančním kmitočtu 11

4 Numerické metody **14**
4.1 Rungeova-Kuttova metoda čtvrtého řádu 14
4.2 Numerické řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti 15
4.2.1 Úprava rovnic 16
4.2.2 Popis numerické metody 17
4.2.3 Programové řešení 18
4.3 Numerické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti . . 19
4.3.1 Převedení modelové rovnice do kmitočtové oblasti 19
4.3.2 Programové řešení 21
4.4 Volba numerické metody a porovnání řešení prezentovaných numerických metod 21

5 Porovnání analytického a numerického řešení **23**
5.1 Profily postupných vln 23
5.2 Stojaté vlny 23
5.3 Distribuce amplitud harmonických složek 23

6 Metody řízení nelineárních akustických polí **26**
6.1 Selektivní útlum 26
6.1.1 Matematický popis 27
6.1.2 Analytické řešení 27
6.1.3 Numerické řešení 29
6.1.4 Porovnání numerického a analytického řešení 30
6.1.5 Rozbor metody 30

6.2 Multifrekvenční buzení 31
6.2.1 Analytické řešení 31
6.2.2 Numerické řešení 32
6.2.3 Porovnání analytického a numerického řešení 33
6.2.4 Rozbor metody 33
6.3 Buzení dvěma nezávislými písty 34

7 Závěr **40**

Použitá literatura a zdroje **43**

Seznam obrázků

2.1 Akustický rezonátor s jedním budicím pístem v místě $x = L$, který kmitá podle funkce $f(\omega^* t)$. 7

3.1 Analytické řešení pro postupnou vlnu pro případ harmonického buzení na prvním rezonančním kmitočtu. 11
3.2 Fázový portrét pro případ harmonického buzení na prvním rezonančním kmitočtu, červeně je vyznačeno analytické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice. 12
3.3 Průběhy stojaté vlny v různých místech rezonátoru pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu. 13

4.1 Akustický rezonátor s jedním pístem v místě $X = 1$, jehož výchylku popisuje funkce $X_P = X_P(T)$. 17
4.2 Schéma pro numerický výpočet. 19
4.3 Porovnání stojatých vln v místě rezonátoru $x = L/2$ získaných numerickou metodou řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti (modře) a numerickou metodou řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti (červeně). 22

5.1 Porovnání profilů postupných vln získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu. 24
5.2 Porovnání profilů stojatých vln získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) v místě rezonátoru $x = L/2$ pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu. 25
5.3 Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení nehomogenní Burgersovy rovnice pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu. 25

6.1 Analytická řešení postupné vlny pro metodu selektivního útlumu pro různé hodnoty parametru D. 30
6.2 Průběhy stojaté vlny pro metodu selektivního útlumu v různých místech rezonátoru pro hodnotu parametru $D = 20$. 31
6.3 Porovnání profilů postupujících vln pro metodu selektivního útlumu získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro různé hodnoty parametru D. 32

6.4 Porovnání stojatých vln pro metodu selektivního útlumu získaných analyticky (modře) a numerickými metodami (červeně) pro hodnotu parametru $D = 20$ v místě $x = L/2$. 33
6.5 Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro metodu selektivního útlumu pro hodnotu parametru $D = 20$. 34
6.6 Fázový portrét pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π pro hodnotu parametru $a = 1$. 35
6.7 Analytická řešení pro postupnou vlnu pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π pro různé hodnoty parametru a. 36
6.8 Průběhy stojaté vlny pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π v různých místech rezonátoru pro hodnotu parametru $a = 20$. 36
6.9 Porovnání profilů postupných vln pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π získaných analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro různé hodnoty parametru a. 37
6.10 Porovnání stojatých vln pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π získaných analyticky a numerickými metodami pro $a = 20$ v místě rezonátoru $x = L/2$. 37
6.11 Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π. 38
6.12 Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π. 38
6.13 Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o $\pi/2$. 39
6.14 Akustický rezonátor s dvěma písty v místě $x = 0$ a $x = L$ jejichž výchylku popisují funkce $f_1(\omega^* t)$ a $f_2(\omega^* t)$. 39

Kapitola 1

Úvod

Využití intenzivních akustických polí v poslední době nachází stále širší uplatnění. Je to důsledkem zejména rozmachu výkonné výpočetní techniky, která je při zkoumání chování těchto polí takřka nezbytná. Při popisu intenzivních zvukových polí se totiž opíráme o nelineární parciální diferenciální rovnice, pro které z větší části neznáme přesná analytická řešení. Často jsme proto nuceni řešení hledat cestou numerického výpočtu, což nám umožní právě výkonná výpočetní technika.

Možností praktického využití zvukových vln vysokých amplitud je celá řada. Některé z aplikací jsou založeny na využití nelineárních jevů, které intenzivní zvuková pole provázejí, v jiných aplikacích je naopak snaha tyto nelineární jevy potlačit. Mezi takové aplikace, pro které jsou nelineární akustické interakce omezující překážkou, patří ty, jenž využívají tzv. akustické rezonátory. Sem patří například akustické kompresory, akustická čerpadla či termoakustické stroje. Pokud jsou splněny rezonanční podmínky a v akustickém rezonátoru začne amplituda zvukové vlny narůstat, nelineární jevy způsobí její postupné zkreslení (viz [**?**]). Takovéto zkreslení má za následek vznik vyšších harmonických složek, tudíž dochází k rozšiřování Fourierova spektra vlny a tím pádem k přesunu akustické energie od nižších kmitočtových složek spektra k vyšším. Protože disipace akustické energie je úměrná kvadrátu kmitočtu, je na těchto vzniklých vyšších kmitočtových složkách spektra více disipována. Pro zvýšení jakosti rezonátoru, a tím pádem i zvýšení účinnosti celé aplikace, je tedy záhodno nelineární jevy co nejvíce potlačit.

Dle konkrétní aplikace se mohou nároky na spektrum nelineární stojaté vlny vybuzené uvnitř rezonátoru lišit. V některých aplikacích může být žádoucí, aby měla první harmonická složka stojaté vlny výrazně vyšší amplitudu než ostatní harmonické složky. V jiných aplikacích je naopak výhodné, aby co do velikosti amplitudy byla dominantní jiná harmonická složka, nebo je třeba potlačení určité harmonické složky. Požadavky na tvar spektra nelineární stojaté vlny za účelem zvýšení účinnosti konkrétního zařízení mohou být skutečně různé. A právě metodám, které umožňují řídit spektrum nelineární stojaté vlny uvnitř akustického rezonátoru vyplněného plynem, se věnuje tato práce.

Dříve než se zaměříme na samotné metody řízení, seznámíme se se základními modelovými rovnicemi, kterých se používá k modelování nelineárních zvukových vln. Ty posléze za určitých předpokladů zjednodušíme, čímž dospějeme k modelové Kuzněcovově rovnici, která představuje jednu ze základních rovnic nelineární akustiky. Pro naše účely je možné

přijmout ještě další zanedbání, po jejichž aplikaci a následných úpravách dostaneme další modelovou rovnici - nehomogenní Burgersovu rovnici. Tu budeme poté analyticky řešit pro případ akustického rezonátoru vyplněného ideálním plynem. Nejprve pro případ buzení pouze na prvním rezonančním kmitočtu, potom pro uvažované způsoby řízení, tj. selektivního útlumu, multifrekvenčního buzení a buzení dvěma nezávislými písty.
Byly vytvořeny programy v jazyce C pro numerické řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti a nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti. Výsledky numerické simulace budou použity k porovnání s analytickými řešeními pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu i uvažovaných metod řízení. Též bude pomocí nich proveden rozbor uvažovaných metod řízení.

Kapitola 2

Modelové rovnice pro popis nelineárních akustických polí

2.1 Základní modelové rovnice

Při modelování zvukových polí se vychází ze soustavy rovnic, která obsahuje základní rovnice mechaniky kontinua a termodynamické rovnice. Omezíme-li se pouze na tekutiny, pak tato soustava bude obsahovat Navier-Stokesovu pohybovou rovnici, rovnici kontinuity, rovnici toku tepla a stavovou rovnici (viz [**?**], [**?**], [**?**], [**?**]).
Navier-Stokesova pohybová rovnice popisuje pohyb obecné vazké tekutiny a má tvar

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}\right]=-\boldsymbol{\nabla}p+(\zeta+\frac{\eta}{3})\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})+\eta\nabla^2\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

kde ρ je hustota tekutiny, $\mathbf{v}$ je její rychlost, t je čas a p představuje tlak. Koeficient η se nazývá dynamická vazkost, která se uplatní při smykových deformacích elementu tekutiny, koeficient ζ je tzv. druhá vazkost, jenž se projeví při změně objemu tekutiny při zachování jejího tvaru (viz [**?**]).
Rovnice kontinuity má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}=0, \tag{2.2}$$

v níž $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ vyjadřuje proudovou hustotu tekutiny.
Rovnice toku tepla má tvar

$$\rho\theta\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}s\right)=\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\zeta\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right)^2+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{\nabla}\theta), \tag{2.3}$$

kde θ je termodynamická teplota, κ je koeficient tepelné vodivosti, s je měrná entropie a δ_{ik} je tzv. Kroneckerovo delta.
Stavová rovnice, jenž popisuje termodynamický stav uvažované soustavy, má tvar

$$p=p\left(\rho,s\right). \tag{2.4}$$

Pro soustavu těchto čtyř rovnic není známo obecné analytické řešení, tudíž je nutné hledat jejich řešení numerickými metodami nebo je dále zjednodušit.

2.2 Kuzněcovova rovnice

Použitím numerických metod k hledání řešení soustavy základních modelových rovnic ovšem vyvstávají další problémy. Jedná se zejména o časovou náročnost a stabilitu výpočtu. Z toho důvodu je nasnadě přijmout určitá zanedbání a úlohu si zjednodušit. První možné zjednodušení je, že některé členy v rovnicích (**??**) až (**??**) zanedbáme. Mnohé numerické i fyzikální experimenty ukazují, že v naprosté většině případů se v rovnicích vystačí se členy maximálně druhého řádu.
Kromě tohoto zjednodušení můžeme dále předpokládat, že se budeme zabývat pouze nevírovým zvukovým polem, tj. takovým, pro které platí

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Jedná se tedy o pole potenciálové. Rychlost lze v takovém případě vyjádřit pomocí skalární veličiny zvané rychlostní potenciál jako

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi. \tag{2.6}$$

Pokud se budeme držet těchto zjednodušení, lze po jistých úpravách (viz [**?**],[**?**]) dospět k následující rovnici, která obsahuje členy maximálně druhého řádu

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi = \frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{B}{2 c_0^2 A} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 \right]. \tag{2.7}$$

Tato modelová rovnice se nazývá Kuzněcovova rovnice. Objevuje se v ní koeficient B/A, který se zve parametr nelinearity, jenž charakterizuje nelineární vztah mezi tlakem p a hustotou ρ prostředí, v němž se vlny šíří (viz [**?**], [**?**]). Koeficient b se nazývá koeficient difúze a platí pro něj vztah

$$b = \zeta + \frac{4\eta}{3} + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right), \tag{2.8}$$

v němž c_V je měrná tepelná kapacita látky při konstantním objemu a c_p je měrná tepelná kapacita látky při konstantním tlaku, c_0 představuje adiabatickou rychlost šíření vlny v lineárním přiblížení.
Vzhledem k tomu, že se v této práci zaměřujeme na studium chování nelineárních akustických vln ve vzduchu, vyjádříme si parametr nelinearity v rovnici (**??**) pro případ ideálního plynu, za který můžeme v tomto případě vzduch považovat. Vyjdeme-li přitom z adiabatické rovnice ideálních plynů (viz [**?**], [**?**]), parametr nelinearity upravíme do tvaru

$$\frac{B}{A} = \gamma - 1, \tag{2.9}$$

kde $\gamma = c_p/c_V$. Rovnici (**??**) si pak ještě můžeme přepsat pro jednorozměrný případ, protože v rezonátorech, ve kterých budeme zvuková pole vyšetřovat, budeme předpokládat buzení pouze rovinných vln. Rovnice (**??**) tedy pro naše účely přejde do tvaru

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma - 1}{2 c_0^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \tag{2.10}$$

Ačkoli výsledná rovnice obsahuje členy maximálně druhého řádu, není ani pro ni známé analytické řešení pro fyzikálně zajímavé okrajové podmínky. Jedná se však o podstatné zjednodušení výchozí soustavy modelových rovnic, přičemž přesnost je pro naprostou většinu aplikací dostačující.

2.3 Nehomogenní Burgersova rovnice

Při modelování nelineárních stojatých vln ve válcových rezonátorech s dokonale tuhými stěnami bez uvažování akustické mezní vrstvy je možné jednorozměrnou Kuzněcovovou rovnici (**??**) dále zjednodušit (viz [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**]). V druhém přiblížení můžeme zanedbat interakci mezi nelineárními vlnami, které se v uvažovaném rezonátoru šíří proti sobě a jejichž superpozicí vzniká výsledné zvukové pole. Tyto vlny jsou svázány pouze podmínkami na okrajích rezonátoru.
Další možné zjednodušení je zanedbání faktu, že se budicí píst pohybuje, což lze připustit pro velmi malé amplitudy výchylky. Tím pádem se okrajová podmínka pro rezonátor na straně pístu nebude s časem měnit. Pokud se přidržíme výše zmíněných předpokladů, lze hledat řešení rovnice (**??**) ve tvaru

$$\varphi = \varphi_+ \left(\mu x, \mu t, \tau_+ = t - \frac{x}{c_0} \right) - \varphi_- \left(\mu x, \mu t, \tau_- = t + \frac{x}{c_0} \right), \tag{2.11}$$

kde μ je malý bezrozměrný parametr ($0<\mu<1$). Znaménka „+“, resp. „−“ v indexech naznačují příslušnost k vlně, jenž se šíří rezonátorem v kladném, resp. záporném směru osy x. Pokud dosadíme předpokládané řešení (**??**) do rovnice (**??**), provedeme transformaci do nových souřadnic, zanedbáme členy třetího a vyššího řádu, a nebudeme-li uvažovat interakci mezi vlnami, které se šíří proti sobě, dostaneme po úpravách dvě rovnice

$$c_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} - \frac{\partial v_+}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0} v_+ \frac{\partial v_+}{\partial \tau_+} = \frac{b}{2\rho_0 {c_0}^2} \frac{\partial^2 v_+}{\partial \tau_+^2} \tag{2.12}$$

$$-c_0 \frac{\partial v_-}{\partial x} - \frac{\partial v_-}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0} v_- \frac{\partial v_-}{\partial \tau_-} = \frac{b}{2\rho_0 {c_0}^2} \frac{\partial^2 v_-}{\partial \tau_-^2}, \tag{2.13}$$

kde $\beta = (\gamma + 1)/2 = 1 + B/(2A)$ je koeficient nelinearity a $v_\pm = \partial \varphi_\pm / \partial x$ je akustická rychlost vln šířících se v uvažovaném směru. Akustickou rychlost výsledné stojaté vlny v rezonátoru bychom dostali na základě řešení rovnic (**??**) a (**??**) jako

$$v = v_+ - v_-. \tag{2.14}$$

Označíme-li délku rezonátoru L, pak můžeme pro jeho vlastní úhlové frekvence ω_n psát

$$\omega_n = \frac{n\pi c_0}{L} = n\omega \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

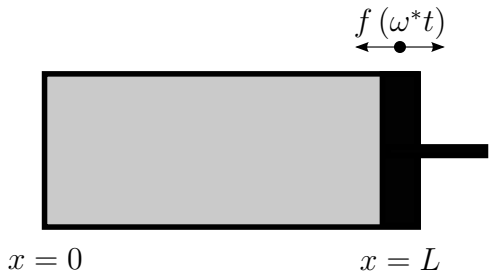
V případě, že budeme uvažovat stojaté vlny vybuzené pístem v místě $x = L$, můžeme si vyjádřit počáteční a okrajové podmínky následujícím způsobem

$$v = (v_+ - v_-)_{x=0} = 0, \tag{2.16}$$

$$v = (v_+ - v_-)_{x=L} = f(\omega^* t), \tag{2.17}$$

$$v = (v_+ - v_-)_{t=0} = 0, \tag{2.18}$$

kde $f = f(\omega^* t)$ je nějaká obecná periodická funkce popisující výchylku budicího pístu. Popisovanou soustavu schematicky znázorňuje obrázek **??**. Pokud budeme předpokládat,



Obrázek 2.1: Akustický rezonátor s jedním budicím pístem v místě $x = L$, který kmitá podle funkce $f(\omega^* t)$.

že se budicí frekvence pístu ω^* jen málo liší od vlastních frekvencí rezonátoru ω, definované vztahem (**??**), potom

$$\frac{\omega^*}{\omega} = n + \delta, \quad |\delta| \sim \mu, \tag{2.19}$$

kde n je kladné celé číslo a $\delta = (\omega^* - n\omega)/\omega$ je koeficient rozladění. Za výše zmíněných předpokladů lze pro rovnice (**??**) a (**??**) společně s podmínkami (**??**), (**??**) a (**??**) získat metodou postupných aproximací jedinou rovnici (viz [**?**], [**?**]). Při ní se předpokládá, že platí

$$v_\pm = v'_\pm + v''_\pm + \ldots, \quad \left|v'_\pm\right| \gg \left|v''_\pm\right| \gg \ldots, \quad v'_\pm \sim \mu, v''_\pm \sim \mu^2. \tag{2.20}$$

Pokud uvážíme, že platí rovnice (**??**), pak po dosazení z rovnice (**??**) dostáváme

$$v = v_+ - v_- = \left(v'_+ - v'_-\right) + \left(v''_+ - v''_-\right) + \ldots. \tag{2.21}$$

Vzhledem k tomu, že vlny šířící se proti sobě se podél osy x mění pomalu, platí

$$\frac{\partial v_\pm}{\partial x} = \frac{\partial v'_\pm}{\partial x} + \frac{\partial v''_\pm}{\partial x} + \ldots \sim \mu^2. \tag{2.22}$$

Protože v této rovnici potřebujeme zajistit řád, je nutné zavést předpoklad

$$\frac{\partial v'_\pm}{\partial x} = 0, \tag{2.23}$$

jelikož $v'_\pm \sim \mu$ a $v''_\pm \sim \mu^2$. Řešení rovnic (**??**) pro rychlosti v prvním přiblížení má tvar

$$v'_\pm = \overline{v}(t, \tau_\pm), \tag{2.24}$$

kde $\overline{v}$ představuje libovolnou blíže nespecifikovanou funkci, která má stejný tvar pro obě vlny šířící se proti sobě.
Přidržíme-li se výše zmíněných předpokladů, můžeme odvodit modelovou rovnici

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\pi c_0 \delta}{L\omega^*}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \tau} - \frac{\beta}{c_0}\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \tau^2} = \frac{c_0}{2L} f(\omega^* t), \tag{2.25}$$

kde $\tau = t - L/c_0$. Tato rovnice představuje nehomogenní Burgersovu rovnici. Řešení pro akustickou rychlost nelineárních stojatých vln v uvažovaném rezonátoru z ní potom získáme jako

$$v = \overline{v}\,(t, \tau_+) - \overline{v}\,(t, \tau_-) + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{v_n x}{2L} \left[\sin\left(\omega_n^* \tau_+ + \phi_n\right) + \sin\left(\omega_n^* \tau_- + \phi_n\right)\right]. \qquad (2.26)$$

Kdybychom chtěli získat funkční závislost v na x a t, dosadíme za $\tau_\pm = t \mp x/c_0$ ve vztahu (**??**).
Řešení nehomogenní Burgersovy rovnice (**??**) si můžeme vyjádřit i ve tvaru Fourierovy řady

$$\overline{v} = \sum_{q=1}^{\infty} \left[a_q(t) \cos(q\omega\tau_\pm) + b_q(t) \sin(q\omega\tau_\pm)\right]. \qquad (2.27)$$

Budeme-li předpokládat, že $\omega_n^* = \omega_n$ a dosadíme-li vztah (**??**) a $\tau_\pm = t \mp x/c_0$ do vztahu (**??**), dostaneme následující vztah

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{q=1}^{\infty} \left[2a_q(t) \sin\left(\frac{q\omega}{c_0} x\right) \sin\left(q\omega t\right) - 2b_q(t) \sin\left(\frac{q\omega}{c_0} x\right) \cos\left(q\omega t\right)\right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{v_n x}{L} \cos\left(\frac{n\omega}{c_0} x\right) \sin\left(n\omega t + \phi_n\right). \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Tímto jsme si nastínili odvození základních modelových rovnic, kterých se používá k popisu nelineárních zvukových vln v akustických rezonátorech. V dalších dvou kapitolách se budeme věnovat jejich analytickému a numerickému řešení.

Kapitola 3

Analytická řešení nehomogenní Burgersovy rovnice

V předchozí kapitole jsme se zaměřili na nástin odvození rovnic popisující nelineární zvuková pole v akustických rezonátorech. V této části budeme analyticky řešit nehomogenní Burgersovu rovnici (**??**) pro případ harmonického buzení na rezonančních kmitočtech rezonátoru. Budeme uvažovat jednorozměrný akustický rezonátor s jedním pístem situovaným v místě $x = L$ (viz obrázek **??**).

3.1 Bezrozměrný tvar nehomogenní Burgersovy rovnice a její obecné řešení

Budicí funkce f v okrajové podmínce (**??**) je periodickou funkcí, takže si ji umíme vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$f = f\left(\omega^* t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin\left(n\omega^* t + \phi_n\right), \tag{3.1}$$

kde v_{mn} je hodnota n-té harmonické složky a ϕ_n je její počáteční fázový posuv, $\omega^* = \omega = \pi c_0/L$. Pokud si vyjádříme čas t pomocí $\tau = t - L/c_0$, dostaneme

$$t = \tau + \frac{L}{c_0}. \tag{3.2}$$

Dosadíme-li vyjádření času t do funkce f dané (**??**), získáme po úpravě následující předpis

$$f = f\left(\omega^* t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin\left(n\omega\tau + n\pi + \phi_n\right), \tag{3.3}$$

Dále si pro účely řešení, ať již analytického nebo později numerického, přepíšeme rovnici (**??**) do bezrozměrného tvaru (viz [**?**])

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(ny + n\pi + \phi_n\right), \tag{3.4}$$

kde

$$V = \frac{\overline{v}}{v_0}, \quad y = \omega\tau, \quad \sigma = \frac{t}{t_s}, \quad G = \frac{2\rho_0 c_0 v_0 \beta}{b\omega},$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{v_r c_0}{2\pi\beta}}, \quad a_n = \frac{v_{mn}}{v_r}, \quad t_s = \frac{c_0}{v_0\beta\omega}, \tag{3.5}$$

kde v_r je referenční rychlost.
Nyní přijmeme několik zjednodušení. Budeme uvažovat, že již nastal ustálený stav, tedy že platí

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0, \tag{3.6}$$

a zanedbáme i člen reprezentující termoviskózní ztráty, tj. budeme uvažovat, že $G^{-1} = 0$. Uvažování nenulového G^{-1} by velmi zkomplikovalo řešení. Rovnice (**??**) se po těchto zjednodušeních zredukuje do tvaru

$$-V\frac{dV}{dy} = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(ny + n\pi + \phi_n\right). \tag{3.7}$$

Rovnici (**??**) potom upravíme následovně

$$\frac{dV^2}{dy} = -2\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(ny + n\pi + \phi_n\right). \tag{3.8}$$

a pak ztotožníme pravou stranu rovnice (**??**) s funkcí $h\left(y, a_n, \phi_n\right)$ čímž dostaneme

$$\frac{dV^2}{dy} = h\left(y, a_n, \phi_n\right), \tag{3.9}$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu řešitelná metodou separací konstant. Aplikujeme-li tuto metodu, získáme pro funkci V řešení ve tvaru

$$V = \pm\sqrt{H\left(y, a_n, \phi_n\right) + q} = \pm M\left(y, a_n, \phi_n\right), \tag{3.10}$$

kde funkce H je primitivní funkce funkce h a q je integrační konstanta. Integrační konstanta musí mít takovou hodnotu, aby se po přičtení k funkci H nedostal celkový výraz pod odmocninou v rovnosti (**??**) do záporných hodnot. Z těchto důvodů je nutné volit (viz [**?**])

$$q = -\left|\min\left\{H\left(y, a_n, \phi_n\right); y \in \langle -\pi, \pi)\right\}\right|. \tag{3.11}$$

Dále pro výslednou funkci V musí platit následující podmínka

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{3.12}$$

Kdyby neplatila, tj. kdyby měla bezrozměrná akustická rychlost V nenulovou střední hodnotu, naznačovalo by to, že v rezonátoru dochází ke stacionárnímu toku hmoty, což neuvažujeme. Z toho důvodu v místech minima funkce M musí dojít v profilu vlny ke změně znaménka a tedy podmínka (**??**) bude splněna.

3.2 Buzení na prvním rezonančním kmitočtu

Nyní budeme vyšetřovat případ buzení rezonátoru na jeho prvním rezonančním kmitočtu $\pi c_0/L$. Budeme tedy v rovnici (**??**) uvažovat, že $a_n = 0$ pro $n > 1$, dále pak $\phi_1 = -\pi$ a že $v_r = v_{m1}$. V takovém případě bude mít rovnice (**??**) následující tvar

$$-V\frac{dV}{dy} = \sin(y). \tag{3.13}$$

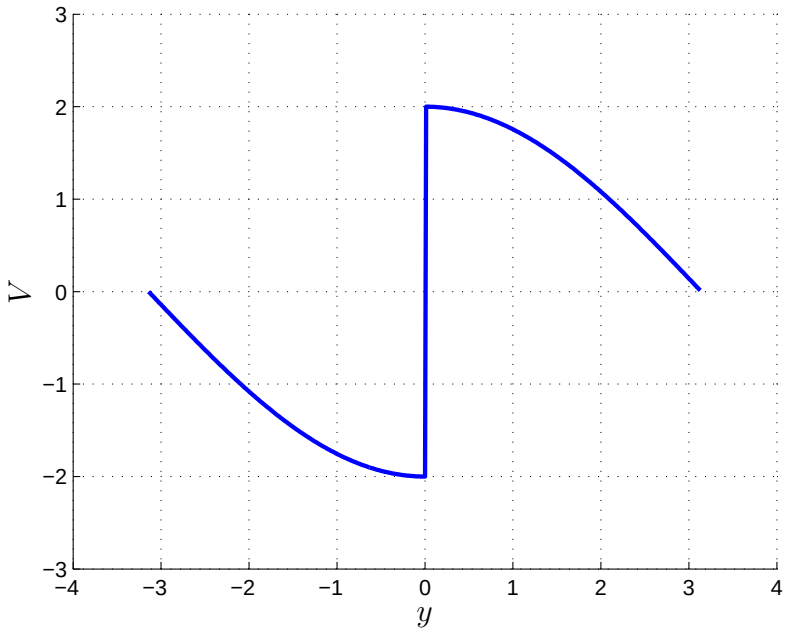
Postupem uvedeným v kapitole **??** dostaneme

$$V = \pm\sqrt{2\cos(y) + q} = \pm\sqrt{4\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) + q}. \tag{3.14}$$

V souladu s rovnicí (**??**) zvolíme $q = 0$, čímž dostaneme

$$V = \pm 2\cos\left(\frac{y}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\operatorname{sign}(y). \tag{3.15}$$

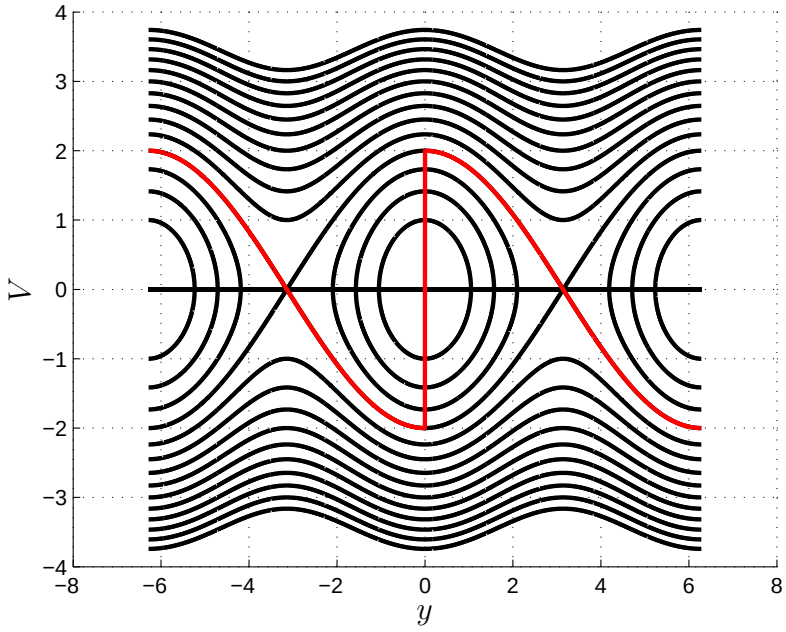
Jak již bylo uvedeno výše, musí výsledné řešení respektovat podmínku (**??**). Z toho důvodu musí profil vlny v místě $y = 0$ měnit znaménko, což je zajištěno v rovnici (**??**) funkcí signum (znaménkovou funkcí). Průběh řešení (**??**) je zachycen na obrázku **??**.
Získané řešení ověříme studiem fázového portrétu na obrázku **??**. V něm vykreslujeme funkci V dané předpisem (**??**) pro různé hodnoty q. Červeně je zvýrazněn průběh pro



Obrázek 3.1: Analytické řešení pro postupnou vlnu pro případ harmonického buzení na prvním rezonančním kmitočtu.

$q = 0$, který odpovídá našemu řešení (**??**). Lze vidět, že průběh našeho řešení ve fázovém

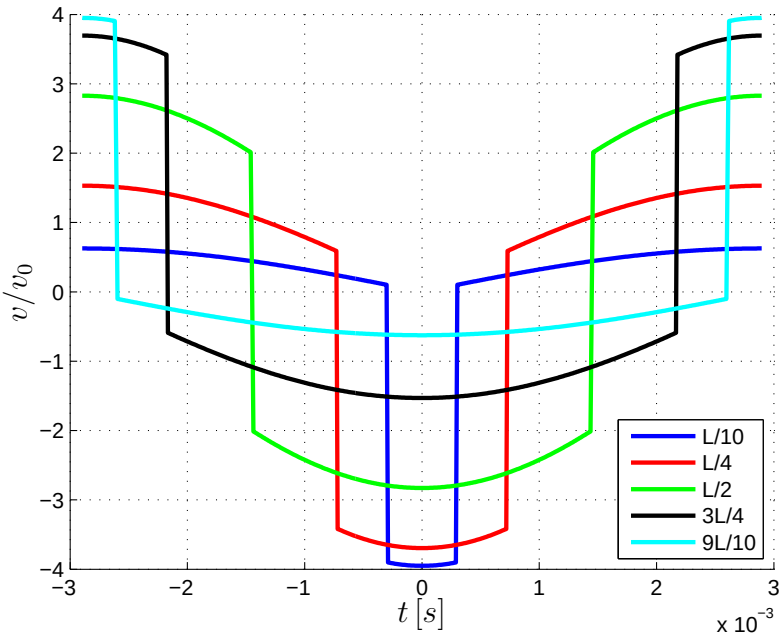
portrétu kopíruje separatrixu.
Výslednou stojatou vlnu získáme dosazením za $\tau_{\pm} = t \mp x/c_0$ za τ v nalezeném řešení a dosazením do vztahu (**??**). Tím dostaneme po úpravě následující vztah



Obrázek 3.2: Fázový portrét pro případ harmonického buzení na prvním rezonančním kmitočtu, červeně je vyznačeno analytické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0}(x,t) = \quad & 2\cos\left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\omega x}{2}c_0\right)\operatorname{sign}\left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\omega x}{2}c_0\right) - \\ - \quad & 2\cos\left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\omega x}{2}c_0\right)\operatorname{sign}\left(\frac{\omega t}{2} + \frac{\omega x}{2}c_0\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Vztah (**??**) popisuje stojatou vlnu v prvním přiblížení pro případ buzení jednorozměrného rezonátoru na prvním rezonančním kmitočtu a představuje přibližné řešení Kuzněcovovy rovnice (**??**).
Na obrázku **??** jsou zachyceny průběhy stojaté vlny v různých místech rezonátoru. Z obrázku je patrné, že v profilech stojatých vln dochází k diskontinuálním změnám v hodnotách akustické rychlosti. V případě uvažování termoviskózních ztrát by diskontinuity byly nahrazeny rázy konečné šířky.
V další části se budeme věnovat numerickým metodám, které budou použity k ověření analytických řešení a rozboru uvažovaných metod řízení spektra nelineární stojaté vlny v akustických rezonátorech.



Obrázek 3.3: Průběhy stojaté vlny v různých místech rezonátoru pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu.

Kapitola 4

Numerické metody

Jak již bylo naznačeno v předchozí kapitole, není známo obecné řešení soustavy rovnic (**??**), (**??**), (**??**) a (**??**), jichž se používá k modelování nelineárních zvukových polí. Omezíme-li se v těchto rovnicích na členy maximálně druhého řádu a budeme předpokládat potenciálové pole, pak můžeme po jistých úpravách dospět k jediné modelové rovnici (**??**). Avšak ani pro tuto rovnici není známo analytické řešení pro fyzikálně zajímavé okrajové podmínky. I když jsme si Kuzněcovovu rovnici nadále zjednodušili do modelové rovnice (**??**), stále jsme schopni analyticky řešit jen některé případy.
Nezbývá tudíž jiná možnost, než abychom pro nalezení řešení modelových diferenciálních rovnic použili numerických metod.

4.1 Rungeova-Kuttova metoda čtvrtého řádu

Jednou z nejrozšířenějších numerických metod užívaných k řešení obyčejných diferenciálních rovnic jsou Rungeovy-Kuttovy metody, které patří mezi tzv. jednokrokové metody. V nich počítáme nové hodnoty pouze na základě výsledku předchozího kroku řešení. Následující výklad metody byl převzat z [**?**].
Diferenciální rovnice, jenž se těmito metodami řeší jsou obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s příslušnou počáteční podmínkou, které můžeme obecně vyjádřit v tomto tvaru

$$\frac{dg}{dt} = f\left(t, g\right), \quad g\left(a\right) = g_0. \tag{4.1}$$

Funkce $g = g\left(t\right)$ je funkce, kterou se snažíme nalézt. Pokud hledáme její funkční hodnotu v nějakém čase $t = b$, probíhá algoritmus tak, že závislou proměnnou t v jednotlivých krocích inkrementujeme o numerický krok $h_t = (b - a)/n$, kde n je počet kroků, kterými se chceme do bodu b dostat. Hodnotu funkce g v kroku $i + 1$ spočítáme z hodnoty v předchozím kroku g_i a z hodnot prvních N členů Taylorovy řady funkce g, kde N je řád

metody. Pokud si tedy g_{i+1} rozepíšeme do Taylorovy řady, tak dostaneme

$$\begin{aligned} g_{i+1} &= g_i + \frac{dg}{dt}_{t_i,g_i} (t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2g}{dt^2}_{t_i,g_i} (t_{i+1} - t_i)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{d^3g}{dt^3}_{t_i,g_i} (t_{i+1} - t_i)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4g}{dt^4}_{t_i,g_i} (t_{i+1} - t_i)^4 + \\ &+ O\left(t_{i+1} - t_i\right)^5, \end{aligned} \tag{4.2}$$

přičemž $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Pro účely této práce vystačíme s Rungeovou-Kuttovou metodou čtvrtého řádu, tudíž člen $O\left(t_{i+1} - t_i\right)^5$ zanedbáme. Dále do Taylorova rozvoje (**??**) dosadíme vztah (**??**) a $h_t = t_{i+1} - t_i$, čímž dostaneme

$$g_{i+1} = g_i + f\left(t_i, g_i\right) h_t + \frac{1}{2!}\frac{df}{dt}_{t_i,g_i} h_t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2g}{dt^2}_{t_i,g_i} h_t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^3f}{dt^3}_{t_i,g_i} h_t^4. \tag{4.3}$$

V tomto vyjádření bychom pro g_{i+1} potřebovali znát první, druhou a třetí derivaci funkce f. Dá se však ukázat, že tyto derivace nutně potřebovat nebudeme a vystačíme pouze s hodnotami funkce f v určitých časových bodech. Postup tedy bude takový, že nejprve vypočteme následující pomocné body (viz [**?**])

$$\begin{aligned} k_{i,1} &= f\left(t_i, g_i\right) \\ k_{i,2} &= f\left(t_i + \frac{h_t}{2}, g_i + \frac{h_t}{2} k_{i,1}\right) \\ k_{i,3} &= f\left(t_i + \frac{h_t}{2}, g_i + \frac{h_t}{2} k_{i,2}\right) \\ k_{i,4} &= f\left(t_i + h_t, g_i + h_t k_{i,3}\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

a hodnotu g_{i+1} potom získáme takto

$$g_{i+1} = g_i + \frac{h_t}{6}\left(k_{i,1} + 2k_{i,2} + 2k_{i,3} + k_{i,4}\right). \tag{4.5}$$

Výhoda tohoto vyjádření spočívá v tom, že nemusíme symbolicky řešit derivace funkce. Existují i jisté obměny, které se liší v tom, z jakých bodů se počítají pomocné body (**??**) a ve výsledné rovnici (**??**).

4.2 Numerické řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti

Nyní využijeme Rungeovu-Kuttovu metodu čtvrtého řádu popsanou výše k numerickému řešení Kuzněcovovy rovnice (**??**) v časové oblasti pro případ nelineárních stojatých vln uvnitř rezonátoru vyplněného vzduchem. Tato metoda byla převzata z [**?**].

4.2.1 Úprava rovnic

Nejprve si pro účely numerické simulace Kuzněcovovu rovnici (**??**) trochu upravíme. V rovnici si dosadíme za druhé parciální derivace podle času z lineární vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{4.6}$$

čímž rovnice (**??**) přejde do tvaru

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - (\gamma-1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{b}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{4.7}$$

Jelikož všechny členy v rovnici (**??**) jsou druhého řádu, přesnost předchozí rovnice se touto úpravou nezmění.
Akustickou rychlost výsledné stojaté vlny získáme z řešení této rovnice následujícím vztahem

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{4.8}$$

V akustických aplikacích se často pracuje také s akustickým tlakem $p' = p - p_0$, kde p je celkový tlak a p_0 je atmosferický tlak. Proto zde uvedeme i rovnici pro něj, ačkoli s ním nadále pracovat nebudeme. Předpis pro akustický tlak získáme vyjdeme-li z Navier-Stokesovy rovnice (**??**) a má následující tvar

$$p' = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{3\zeta+4\eta}{3c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{4.9}$$

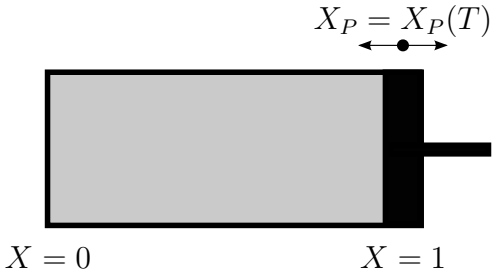
Pro účely numerické simulace se také hodí převést rovnici (**??**) do bezrozměrného tvaru. Bezrozměrné souřadnice si zavedeme tímto způsobem

$$T = \omega^* t, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{\pi c_0 L}, \quad V = \frac{v}{\pi c_0}, \quad P = \frac{p'}{\rho_0\pi^2 c_0^2}, \tag{4.10}$$

přičemž L je délka rezonátoru a $\omega^* = \omega = \pi c_0/L$. Rovnice (**??**) tedy přejde do bezrozměrného tvaru

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} = \left(\frac{1}{\pi^2\Omega^2} - \frac{\gamma-1}{\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial\Phi}{\partial T} + \frac{G_{TV}}{\pi^2\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\frac{\partial\Phi}{\partial T}, \tag{4.11}$$

kde $G_{TV} = b\omega/\rho_0 c_0^2$ je koeficient zohledňující termoviskózní ztráty a $\Omega = L\omega/c_0\pi$ je bezrozměrná úhlová frekvence reprezentující poměr mezi úhlovou frekvencí budicího pístu a první rezonanční frekvencí rezonátoru. Systém popsaný rovnicí (**??**) je schematicky znázorněn na obrázku **??**.
Protože hodláme nelineární stojaté vlny numericky simulovat za použití Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu, rozdělíme si rovnici (**??**) na dvě rovnice prvního řádu. Místo jedné pak budeme mít dvě rovnice ve tvaru rovnice (**??**) určeném pro použití Rungeovy-Kuttovy



Obrázek 4.1: Akustický rezonátor s jedním pístem v místě $X = 1$, jehož výchylku popisuje funkce $X_P = X_P(T)$.

metody, které posléze budeme řešit současně v jednom numerickém kroku. Rovnice budou vypadat následovně

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial T} &= \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} &= \left(\frac{1}{\pi^2 \Omega^2} - \frac{\gamma - 1}{\Omega} \Psi \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{G_{TV}}{\pi^2 \Omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Rovnice pro výpočet bezrozměrné akustické rychlosti V a bezrozměrného akustického tlaku P získáme z rovnic (**??**) a (**??**) a budou mít tento tvar

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \\ P &= -\Omega \Psi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^2 + \frac{\pi^2 \Omega^2}{2} \Psi^2 + \frac{G_V}{\pi^2 \Omega} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

kde $G_V = \omega \kappa (1/c_V - 1/c_p)/\rho_0 c_0^2$.
Předpokládáme-li, že stěny rezonátoru jsou dokonale tuhé, budou mít okrajové podmínky následující tvar

$$V(X = 0, T) = 0 \tag{4.14}$$

$$V(X = 1, T) = X_P(T). \tag{4.15}$$

4.2.2 Popis numerické metody

Metoda použitá k numerické integraci soustavy rovnic (**??**) je založena na náhradě příslušných derivací diferencemi čtvrtého řádu, tudíž soustava parciálních diferenciálních rovnic přejde v soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Tuto soustavu budeme posléze integrovat v čase pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu. Diference čtvrtého řádu mají tento tvar (viz také [**?**], [**?**])

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &\approx \frac{F(X - 2h_X) - 8F(X - h_X) + 8F(X + h_X) - F(X + 2h_X)}{12 h_X}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} &\approx \frac{1}{12 h_X^2} \left[-F(X - 2h_X) + 16F(X - h_X) - 30F(X) + \right. \\ &\quad \left. + 16F(X + h_X) - F(X + 2h_X) \right], \end{aligned} \tag{4.16}$$

kde funkce F může být buď funkce Φ nebo funkce Ψ a h_X je krok numerické integrace v X-ové souřadnici.
Vzhledem k tomu, že používáme při numerickém řešení centrální schéma čtvrtého řádu, ve kterém nahrazujeme parciální derivace v soustavě rovnic (**??**) diferencemi (**??**), musíme doplnit numerickou síť bodů dalšími dvěma body. Je to z toho důvodu, že tyto diference potřebují ke svému výpočtu znát i hodnotu příslušné funkce až o dva kroky v X-ové souřadnici vpřed či vzad. To je problém při výpočtu bezrozměrného rychlostního potenciálu Φ a jeho derivace $\Psi = \partial\Phi/\partial T$ v prvním a druhém bodě na začátku rezonátoru a v předposledním a posledním bodě na konci rezonátoru, kde je umístěn budicí píst. Tento problém můžeme vyřešit použitím extrapolačních metod pro získání předpisu pro ony dva body, kterými doplníme numerické schéma. Pro rychlostní potenciál Φ v těchto bodech na straně rezonátoru $X = 0$, které si označíme R_S a S_S, můžeme psát následující rovnice

$$\begin{aligned} \Phi_{R_S} &= \frac{48\Phi_{X_1} - 36\Phi_{X_2} + 16\Phi_{X_3} - 3\Phi_{X_4}}{25} \\ \Phi_{S_S} &= \frac{-2\Phi_{X_1} + 14\Phi_{X_2} - 9\Phi_{X_3} + 2\Phi_{X_4}}{5}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

kde polohu bodů X_1 až X_4 a bodů R_S a S_S znázorňuje obrázek **??**. Totožné extrapolace použijeme i pro funkci Ψ v bodech R_S a S_S.
Pro body na straně rezonátoru $X = 1$, budou již extrapolační předpisy o něco složitější. Musíme totiž vzít v potaz fakt, že se píst pohybuje, jinými slovy, se jeho poloha $X_P = X_P(T)$ mění s časem. Zanedbání této skutečnosti by ve výsledku vedlo k nenulovému toku hmoty pístem, což by mělo za následek změnu hustoty a tlaku uvnitř rezonátoru.[1] Označíme-li si tyto body R_P a S_P, budou mít rovnice pro rychlostní potenciál Φ v těchto bodech následující tvar

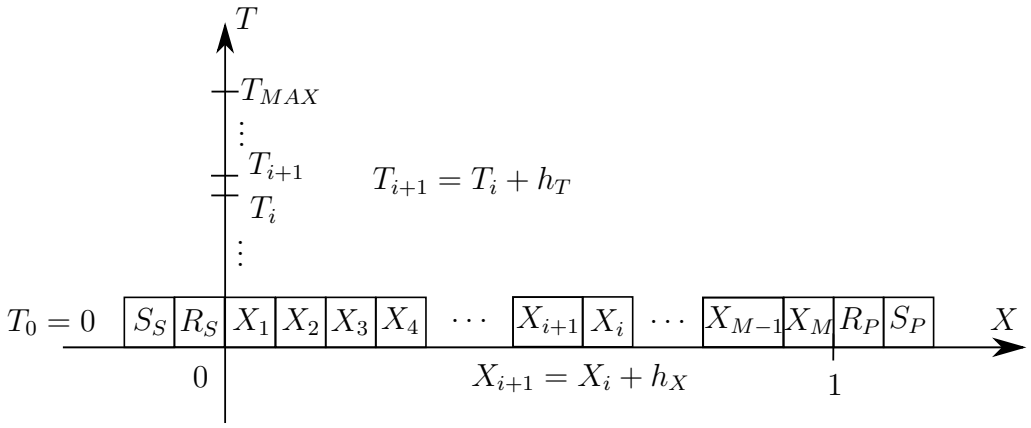
$$\begin{aligned} \Phi_{R_P} &= \frac{4(2X_P - 5h_X)\Phi_{X_M} + (5h_X - 4X_P)\Phi_{X_{M-1}} + 10{h_X}^2 V_P}{4X_P - 15h_X} \\ \Phi_{S_P} &= \frac{3(4X_P - 5h_X)\Phi_{X_M} - 8X_P\Phi_{X_{M-1}} + 30{h_X}^2 V_P}{4X_P - 15h_X}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

kde polohu bodů X_M a X_{M-1} a bodů R_P a S_P znázorňuje obrázek **??**, h_X je opět numerický krok v X-ové souřadnici a $V_P = \Omega\partial X_P/\partial T$ je bezrozměrná rychlost pístu. Extrapolace použité pro funkci Ψ jsou naprosto stejné s tím rozdílem, že bezrozměrná rychlost pístu V_P je nahrazena bezrozměrným zrychlením pístu $A_P = \Omega\partial V_P/\partial T$.
Výše zmíněné předpisy nám tedy umožní doplnit chybějící body pro výpočet diferencí v našem centrálním schématu. Extrapolační rovnice (**??**) a (**??**) jsou druhého řádu, což by mělo být dostatečně přesné pro účely těchto simulací.

4.2.3 Programové řešení

Předchozí postup numerického řešení byl implementován v programu napsaném v jazyce C, který lze nalézt na přiloženém CD a jenž provádí příslušnou numerickou integraci podle

[1] Existují ovšem i numerické metody, které nemusí uvažovat pohyb pístu.



Obrázek 4.2: Schéma pro numerický výpočet.

centrálního schéma popsaném výše.
Je potřeba zdůraznit, že amplitudu budicí funkce X_P, a tím pádem i funkce V_P a funkce A_P je nutno volit takovou, aby nebyla větší než krok mezi jednotlivými body vzdálenými od sebe o numerický krok h_X. Dále je potřeba ohlídat, aby výpočet probíhal opravdu ve všech bodech v X-ové ose, dle volby kroku h_X.

4.3 Numerické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti

V předchozí části jsme si představili metodu použitou k numerickým simulacím nelineárních zvukových polí v časové oblasti. Použili jsme v ní bezrozměrnou Kuzněcovovu rovnici, kterou jsme v čase integrovali pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu. V této části budeme zvuková pole vyšetřovat v kmitočtové oblasti za použití nehomogenní Burgersovy rovnice, přičemž budeme opět uvažovat, že stojaté vlny uvnitř rezonátoru jsou vybuzené jedním pístem v místě $x = L$ (viz obrázek **??**). Následující odvození je převzato z [**?**].

4.3.1 Převedení modelové rovnice do kmitočtové oblasti

Analogicky jako v sekci věnované analytickému řešení nehomogenní Burgersovy rovnice i zde použijeme její bezrozměrný tvar

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = Q(y), \tag{4.19}$$

kde $Q = Q(y)$ je funkce popisující buzení. Hledané řešení rovnice (**??**) a její pravou stranu si vyjádříme pomocí komplexní Fourierovy řady

$$V(\sigma, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(\sigma) \exp(\mathrm{j}ny), \tag{4.20}$$

$$Q(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \exp(\mathrm{j}ny). \tag{4.21}$$

Protože $V(\sigma, y)$ a $Q(y)$ jsou reálné funkce, platí, že

$$V_{-n}(\sigma) = V_n^*(\sigma), \tag{4.22}$$

$$Q_{-n} = Q_n^*, \tag{4.23}$$

kde značka "*"označuje komplexně sdruženou funkci. Dosadíme-li si výrazy (**??**) a (**??**) do rovnice (**??**) dostaneme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dV_n}{d\sigma} + \frac{n^2}{G} V_n - Q_n\right] \exp(\mathrm{j}ny) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_i V_q \exp\left[\mathrm{j}(i+m)y\right], \tag{4.24}$$

což můžeme nadále upravit derivováním pravé strany rovnice (**??**), čímž dostaneme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{dV_n}{d\sigma} + \frac{n^2}{G} V_n - Q_n\right] \exp(\mathrm{j}ny) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{j}\frac{n'}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_q V_{n'-m}\right) \exp\left(\mathrm{j}n'y\right), \tag{4.25}$$

kde $n' = i + m$. Rovnost bude platit pro libovolný bezrozměrný čas y v případě, že $n' = n$, a pokud platí, že

$$\frac{dV_n}{d\sigma} + \frac{n^2}{G} V_n - Q_n = \mathrm{j}\frac{n}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} V_q V_{n-q}. \tag{4.26}$$

Abychom se vyhnuli záporným indexům v sumaci na pravé straně, vyjádříme si ji následujícím způsobem

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} V_q V_{n-q} = \sum_{q=1}^{n-1} V_q V_{n-q} + 2 \sum_{q=n+1}^{\infty} V_q V_{q-n}^*. \tag{4.27}$$

Omezíme-li se na prvních M členů Fourierovy řady, můžeme rovnici (**??**) upravit do tvaru

$$\frac{dV_n}{d\sigma} = -\frac{n^2}{G} V_n + Q_n + \sum_{q=1}^{n-1} V_q V_{n-q} + 2 \sum_{q=n+1}^{M} V_q V_{q-n}^*. \tag{4.28}$$

Rovnice (**??**) představuje soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu s M komplexními neznámými funkcemi $V_1, \ldots, V_M$. Tuto soustavu budeme opět řešit Rungeovou-Kuttovou metodou čtvrtého řádu, která již byla představena výše v kapitole **??**.

4.3.2 Programové řešení

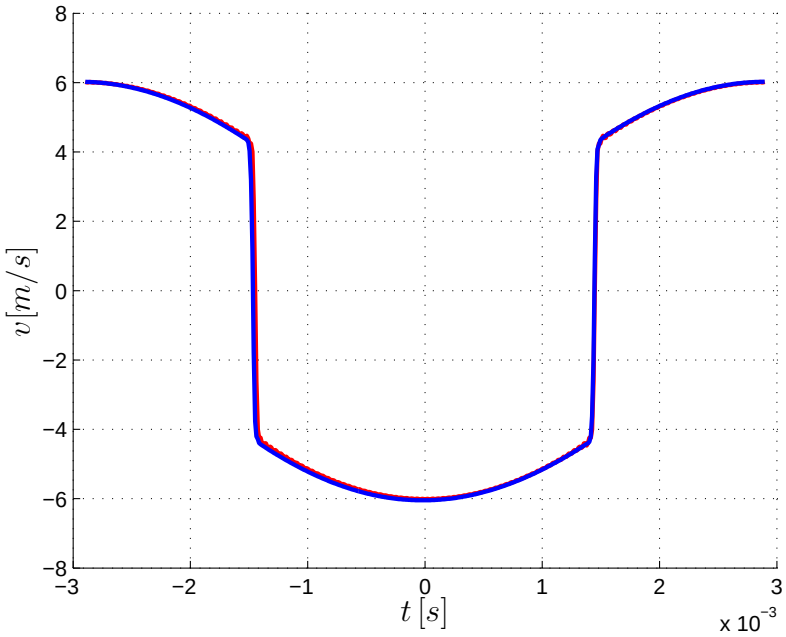
Předchozí postup numerického řešení v kmitočtové oblasti byl opět řešen v programu napsaném v jazyce C, který lze též nalézt na přiloženém CD.

4.4 Volba numerické metody a porovnání řešení prezentovaných numerických metod

V rámci této části práce jsme si představili dvě numerické metody. V kapitole **??** to byla metoda, jenž simulovala nelineární akustické stojaté vlny uvnitř rezonátoru v časové oblasti za použití Kuzněcovovy rovnice (**??**). V kapitole **??** se potom jednalo o metodu, která řešila nehomogenní Burgersovu rovnici (**??**) v kmitočtové oblasti.
Vzhledem k tomu, že v této práci se věnujeme řízení spektra nelineární stojaté vlny uvnitř akustického rezonátoru, použijeme v dalších kapitolách k získání numerických řešení metodu z kapitoly **??**. Ta nám umožní spektrum výsledné nelineární stojaté vlny získat přímo z výstupu programu, jenž tuto metodu numericky řeší. Navíc se budeme při popisu metod řízení v kapitole jim věnované opírat opět o nehomogenní Burgersovu rovnici, tudíž bude přirozenější analytické výsledky porovnávat s numerickými získanými řešením téže rovnice. Metoda popsaná v kapitole **??** řeší Kuzněcovovu rovnici v časové oblasti, tudíž spektrum výsledné nelineární stojaté vlny z výstupu příslušného programu nezískáme. Tuto metodu tedy nebudeme dál používat s tím, že může sloužit k simulaci případů, ve kterých již neplatí předpoklady, za jakých byla nehomogenní Burgersova rovnice (**??**) z Kuzněcovovy rovnice (**??**) odvozena.
Než metodu z kapitoly **??** úplně opustíme, použijeme její řešení pro srovnání s numerickým řešením nehomogenní Burgersovy rovnice. Ověříme tak, jestli prezentované numerické metody vedou ke stejnému výsledku. Uvažujme tedy jednorozměrný akustický rezonátor vyplněný vzduchem s jedním budicím pístem v místě $x = L$ (viz obrázek **??**). Dále uvažujme, že se jedná o případ buzení pouze na prvním rezonančním kmitočtu, tudíž rychlost výchylky budicího pístu si vyjádříme jako

$$v_p = A \sin(\omega t), \tag{4.29}$$

přičemž $\omega = \pi c_0 / L$. Tento tvar buzení poté upravíme zvlášť pro jednotlivé numerické metody a necháme vyřešit pomocí programů na přiloženém CD. Před porovnáním potom ještě musíme bezrozměrným veličinám vrátit rozměr pomocí vztahů (**??**) a (**??**). Pro amplitudu buzení $A = 0.1$ zachycuje srovnání řešení pro výslednou stojatou vlnu obrázek **??**. Pro stabilitu programů byly při numerickém řešení zvoleny parametry $G_{TV} = 0.0025$ u metody popsané v kapitole **??**, a $G = 60$ u metody popsané v kapitole **??**. Dle obrázku **??** lze tedy konstatovat, že obě numerické metody skutečně vedou ke stejnému řešení .



Obrázek 4.3: Porovnání stojatých vln v místě rezonátoru $x = L/2$ získaných numerickou metodou řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti (modře) a numerickou metodou řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti (červeně).

Kapitola 5

Porovnání analytického a numerického řešení

V této kapitole ověříme analytické řešení z třetí kapitoly pro případ buzení jednorozměrného akustického rezonátoru na jeho prvním rezonančním kmitočtu porovnáním s řešením získaným numerickými metodami představenými v čtvrté kapitole.

5.1 Profily postupných vln

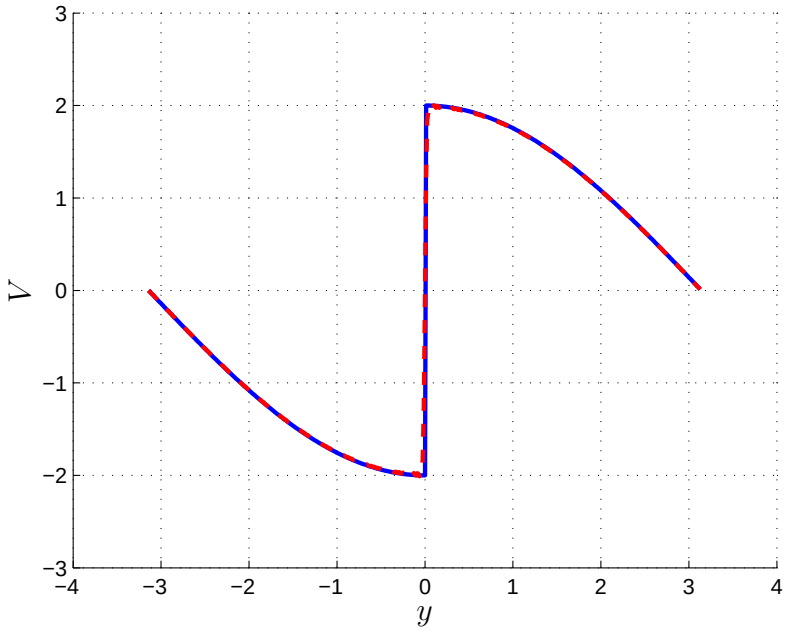
Nejprve porovnáme získané profily postupných vln, které formují výslednou stojatou vlnu. Zde použijeme analytické řešení pro bezrozměrnou akustickou rychlost (**??**) z třetí kapitoly a numerické řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti. Srovnání získaných průběhů zachycuje obrázek **??**. Je patrné, že profily se co do tvaru i amplitudy téměř shodují. Jediné v čem se výrazněji liší je v ostrosti rázu v místě $y = 0$, což je důsledek zanedbání členu reprezentující termoviskózní ztráty v analytickém řešení. Při numerickém řešení programem bylo zvoleno $G = 60$, pro nějž byl numerický výpočet rychlý a stabilní. V důsledku toho je ráz v numerickém řešení pozvolnější i amplituda je mírně nižší.

5.2 Stojaté vlny

Nyní porovnáme analytické řešení (**??**) a numerické řešení pro stojatou vlnu v místě rezonátoru $x = L/2$. Výsledek je zachycen na obrázku **??**. Vzhledem k zanedbáním uvedeným výše je opět amplituda numerického řešení oproti analytickému nepatrně menší a rázy pozvolnější.

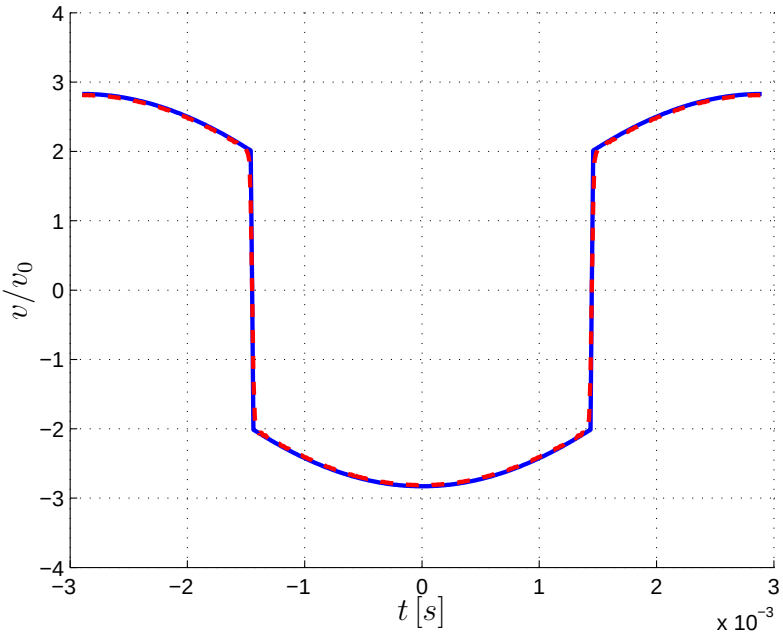
5.3 Distribuce amplitud harmonických složek

Na závěr se podíváme, jak vypadá distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení, což je zachyceno na obrázku **??**. Je zde vidět, že vybuzené vyšší

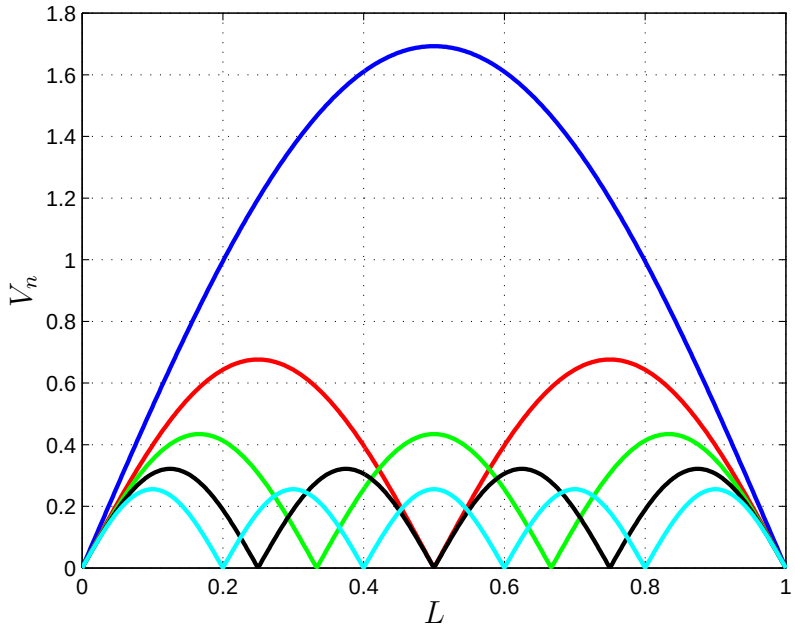


Obrázek 5.1: Porovnání profilů postupných vln získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu.

harmonické složky mají v poměru k první harmonické poměrně nezanedbatelné amplitudy. Na těchto vyšších kmitočtech spektra dochází rychleji k disipaci akustické energie (útlum je úměrný kvadrátu kmitočtu), tudíž generování těchto vyšších harmonických složek je pro řadu aplikací nežádoucím jevem, jelikož jakost rezonátoru je tímto nižší. Z tohoto důvodu se snažíme vybuzení vyšších harmonických složek co nejvýrazněji omezit nějakou vhodnou metodou řízení spektra nelineární stojaté vlny. Takových metod existuje celá řada, některé ze základních metod budou rozebrány v následující kapitole.



Obrázek 5.2: Porovnání profilů stojatých vln získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) v místě rezonátoru $x = L/2$ pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu.



Obrázek 5.3: Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení nehomogenní Burgersovy rovnice pro případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu.

Kapitola 6

Metody řízení nelineárních akustických polí

V předchozích kapitolách jsme se seznámili se základními modelovými rovnicemi popisujícími nelineární akustická pole ve válcových rezonátorech a s numerickými metodami, které používáme k jejich řešení. Dále jsme ukázali způsob, jak dospět k analytickým řešením pro ustálený stav a uvažování ideálního plynu. Tato řešení jsme porovnali s numerickými řešeními nehomogenní Burgersovy rovnice a seznali, že se numerická řešení k těm analytickým uspokojivě blíží. Nyní se zaměříme na metody řízení spektra nelineárních stojatých vln vybuzených v akustickém rezonátoru. Těmito metodami můžeme pozitivně ovlivnit efektivitu využití intenzivních zvukových polí, jenž v posledních letech nacházejí stále větší praktické uplatnění.
Akustické pole nemůže dosahovat nekonečných amplitud. Je zde jisté omezení dané saturačním jevem, který souvisí s nelineárním útlumem. Vliv nelineárního útlumu lze omezit tím, že potlačíme generování vyšších harmonických složek uvnitř rezonátoru, čímž nelineární akustické interakce oslabíme. Jak již bylo uvedeno, těchto metod existuje opravdu celá řada, v této práci si představíme některé ze základních. Konkrétně se bude jednat o metodu selektivního útlumu, multifrekvenčního buzení a buzení dvěma nezávislými písty. Existují i metody řízení založené na práci s rozladěním rezonátoru, avšak my se v rámci této práce nebudeme tomuto způsobu ovlivňování spektra zvukové vlny věnovat.

6.1 Selektivní útlum

Jako první se zaměříme na metodu selektivního útlumu, který spočívá v zatlumení druhé harmonické složky nelineární stojaté vlny uvnitř rezonátoru (viz [**?**]). To vede k výraznému omezení kaskádního procesu, tedy k omezení přesunu akustické energie k vyšším harmonickým složkám, která se namísto toho bude kumulovat v první harmonické složce. Toto lze prakticky provést například tak, že na jednom konci rezonátoru je umístěna elastická stěna, jejíž činitel útlumu má rezonanční charakter, takže lze druhou harmonickou složku stojaté vlny výrazně tlumit, zatímco ostatní harmonické složky stojaté vlny se tlumí co možná nejméně.

6.1.1 Matematický popis

Uvažujme opět rezonátor délky L s jedním pístem umístěným na pozici $x = L$ (viz obrázek **??**). K popisu vybuzených nelineárních stojatých vln uvnitř rezonátoru použijeme nehomogenní Burgersovu rovnici (**??**). Nebudeme-li v ní uvažovat člen rozladění (tj. $\delta = 0$) a dále budeme-li uvažovat buzení pouze na prvním rezonančním kmitočtu a zatlumení druhé harmonické složky, dostaneme rovnici (**??**) ve tvaru (viz [**?**])

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} - \frac{\beta}{c_0}\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \tau^2} = \frac{c_0 v_m}{2L}\sin(\omega\tau) - \alpha b_2(t)\sin(2\omega\tau), \tag{6.1}$$

kde α je koeficient útlumu druhé harmonické složky. Její amplituda není dopředu známa a dá se popsat tímto způsobem

$$b_2(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overline{v}(t,\tau)\sin(2\omega\tau)\mathrm{d}(\omega\tau). \tag{6.2}$$

Rovnici (**??**) si převedeme do bezrozměrného tvaru stejným způsobem jako v kapitole **??**, čímž dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{G}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin(y) - DB_2\sin(2y), \tag{6.3}$$

kde $D = \alpha c_0/\beta\omega v_0$ a $B_2 = b_2/v_{m1}$.

6.1.2 Analytické řešení

Pro analytické řešení rovnice (**??**) zavedeme stejné předpoklady jako při řešení buzení na prvním rezonančním kmitočtu v třetí kapitole. Tedy budeme uvažovat, že již nastal ustálený stav, a zanedbáme člen reprezentující termoviskózní ztráty, tedy že $G^{-1} = 0$. Levou stranu rovnice (**??**) ještě mírně upravíme, čímž dostane při zohlednění uvažovaných zanedbání tuto podobu

$$\frac{dV^2}{dy} = -2\sin(y) + 2DB_2\sin(2y). \tag{6.4}$$

Jedná se opět o stejný typ diferenciální rovnice prvního řádu jako bylo popsáno v kapitole **??**, kterou lze řešit separací konstant, čímž dostaneme

$$V = \pm\sqrt{2\cos(y) + DB_2\cos(2y) + q}, \tag{6.5}$$

kde q je integrační konstanta. Provedeme-li několik úprav za použití vztahů mezi goniometrickými funkcemi a dle rovnice (**??**) zvolíme $q = 0$, takže rovnice (**??**) přejde do tvaru

$$V = 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\sqrt{1 + 2DB_2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\mathrm{sign}\,(y)\,. \tag{6.6}$$

Nyní vypočítáme bezrozměrnou amplitudu druhé harmonické jako

$$B_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\sqrt{1 + 2DB_2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\sin(2y)\mathrm{d}y. \tag{6.7}$$

Tento integrál byl řešen za pomoci programu Maple, který nám dal následující výsledek

$$B_2 = \frac{1}{6\pi(DB_2)^{5/2}}\left[3\sqrt{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2DB_2}{1+2DB_2}}\right)\left(1+4DB_2+4(DB_2)^2\right)\right.$$
$$\left.-20(DB_2)^{3/2}-6\sqrt{DB_2}\right], \tag{6.8}$$

v němž zjednodušíme člen s funkcí arkus sinus tímto způsobem

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{2DB_2}{1+2DB_2}}\right) = \ldots = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2DB_2}}}\right) \approx \arcsin\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4DB_2}}\right). \tag{6.9}$$

Konečná úprava využívá následujícího rozvoje

$$\sqrt{1\pm\mu x} \approx 1 \pm \frac{\mu}{2}x + O(\mu^2), \tag{6.10}$$

který lze aplikovat, pokud $\mu \ll 1$, což bude v tomto případě platit pro $D \gg 1$. Obecně lze výraz typu $\arcsin\left[1/(1+\epsilon)\right]$ rozepsat do Taylorova rozvoje, čímž dostaneme

$$\arcsin\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\epsilon} + \frac{5}{12}\sqrt{2}\epsilon^{3/2} - \frac{43}{160}\sqrt{2}\epsilon^{5/2} + \ldots \quad . \tag{6.11}$$

Pokud budeme toto aplikovat na případ argumentu uvedeného ve vztahu (**??**), a budeme uvažovat pouze první dva členy v Taylorově rozvoji (**??**), získáme

$$\arcsin\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4DB_2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2DB_2}}. \tag{6.12}$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice (**??**) a upravíme do tvaru

$$B_2 = \sqrt{\frac{2}{DB_2}} - \frac{10}{3\pi DB_2} - \frac{2}{\pi DB_2}. \tag{6.13}$$

Tento vztah ještě dále upravíme do tvaru

$$B_2\left(1+\frac{16}{3\pi DB_2{}^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{DB_2}}. \tag{6.14}$$

Zde opět uplatníme rozvoj (**??**), akorát inverzním způsobem, čímž dostaneme

$$B_2\sqrt{1+\frac{32}{3\pi DB_2{}^2}} = \sqrt{\frac{2}{DB_2}}. \tag{6.15}$$

Tuto rovnici umocníme a následně upravíme do následujícího tvaru

$$B_2^3 + \frac{32}{3D\pi}B_2 - \frac{2}{D} = 0. \tag{6.16}$$

Tato rovnice představuje kubickou rovnici, která má jediné reálné řešení

$$B_2 = \frac{\left[\left(27\pi^{3/2} + \sqrt{\frac{2^{15}+3^6\pi^3 D}{D}}\right) D^2\right]^{2/3} - 32D}{3\sqrt{\pi}D\left[\left(27\pi^{3/2} + \sqrt{\frac{2^{15}+3^6\pi^3 D}{D}}\right) D^2\right]^{1/3}}. \tag{6.17}$$

Pokud bychom uvažovali $D < 1$ můžeme rozvoj (**??**) aplikovat přímo na rovnici (**??**), čímž dostaneme

$$V \approx \pm 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\left[1 + DB_2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\right], \tag{6.18}$$

a bezrozměrnou amplitudu druhé harmonické vypočítáme jako

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\left(1 + DB_2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\sin(2y)\mathrm{d}y = \\ &= \ldots = \frac{4}{\pi}\left(\frac{8}{15} - \frac{2}{3}DB_2\right), \end{aligned} \tag{6.19}$$

odkud dostaneme

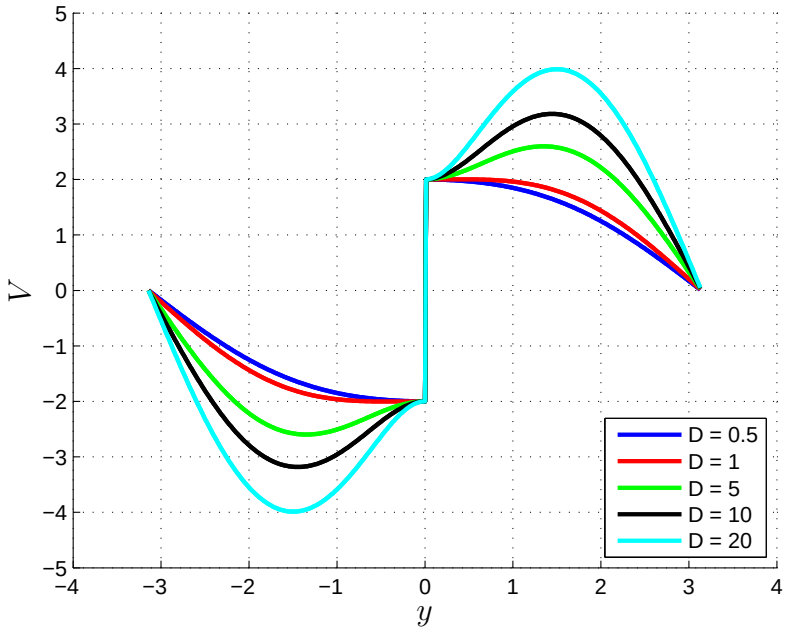
$$B_2 = \frac{32}{15\pi + 40D}. \tag{6.20}$$

Nyní máme analytické řešení pro případy, kdy $D < 1$ a $D \gg 1$. Můžeme si tedy funkci V vykreslit pro různé hodnoty parametru D, což zachycuje obrázek **??**. Výslednou stojatou vlnu potom opět získáme dosazením za $\tau_{\pm} = t \mp x/c_0$ za τ v nalezeném řešení a dosazením do vztahu (**??**). Na obrázku **??** jsou průběhy stojaté vln v různých místech rezonátoru jsou

6.1.3 Numerické řešení

Nyní použijeme metodu pro řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti, abychom si ověřili, že k závěrům, ke kterým jsme došli v kapitole věnované analytickým řešením, lze dojít i numerickou simulací.
Rozdíl oproti řešení buzení na prvním rezonančním kmitočtu bude v soustavě diferenciálních rovnic (**??**) řešených metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu. Zde je nutné při výpočtu diferenciálních rovnice navíc odčítat člen DV_2. Tyto diferenciální rovnice tedy budou mít tvar

$$\frac{dV_n}{d\sigma} = -DV_2 - \frac{n^2}{G}V_n + Q_n + \sum_{q=1}^{n-1} V_q V_{n-q} + 2\sum_{q=n+1}^{M} V_q V_{q-n}^{*}. \tag{6.21}$$



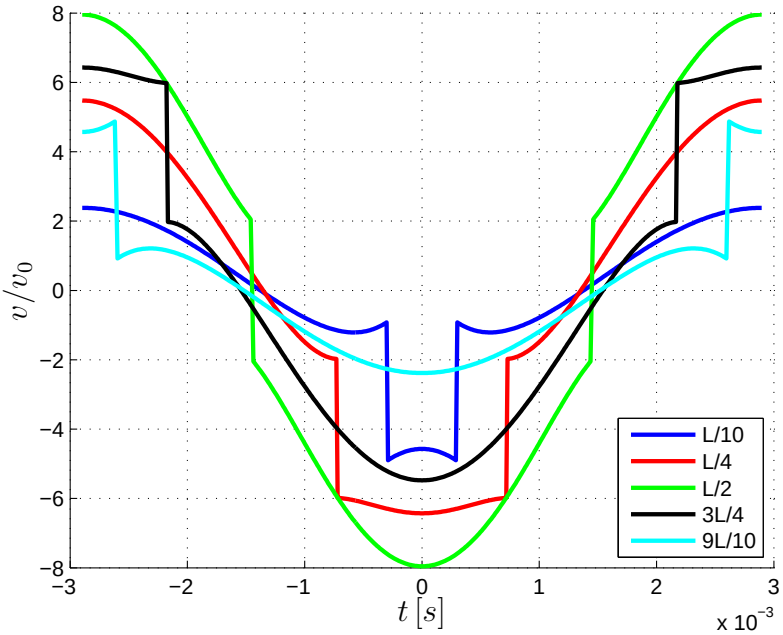
Obrázek 6.1: Analytická řešení postupné vlny pro metodu selektivního útlumu pro různé hodnoty parametru D.

6.1.4 Porovnání numerického a analytického řešení

Nyní porovnáme výsledky získané analytickými a numerickými metodami. Nejprve srovnáme postupující vlny na obrázku **??**, kde jsou vykresleny průběhy pro D rovno 0.5, 1, 5, 10 a 20. Numerické řešení se uspokojivě přesně shoduje s analytickým řešením, je akorát opět vidět, že numerické řešení má vlivem volby $G = 60$ opět o něco menší amplitudu a pozvolnější průběh rázu. Získané analytické řešení pro $D \gg 1$ bylo použito i pro případ $D = 1$ a je vidět, že i v tomto případě se víceméně shoduje s numerickým řešením. Srovnání analytického a numerického řešení pro výslednou stojatou vlnu v místě rezonátoru $x = L/2$ zachycuje obrázek **??**.

6.1.5 Rozbor metody

Podíváme-li se opět na distribuci amplitud prvních pěti harmonických složek řešení na obrázku **??**, shledáme, že došlo k výraznému omezení amplitud vyšších harmonických složek a navíc k zvětšení amplitudy první harmonické složky. Zatlumením druhé harmonické složky se tedy skutečně významně narušil kaskádní proces přelévání energie k vyšším harmonickým složkám. Místo toho se tato energie, která by se jinak rozložila mezi jednotlivé harmonické složky, částečně přelila na první harmonickou složku. Jakost rezonátoru se tím pádem zvýšila, neboť se akustická energie vybuzeného pole v rezonátoru méně disipuje u vyšších harmonických složek.



Obrázek 6.2: Průběhy stojaté vlny pro metodu selektivního útlumu v různých místech rezonátoru pro hodnotu parametru $D = 20$.

6.2 Multifrekvenční buzení

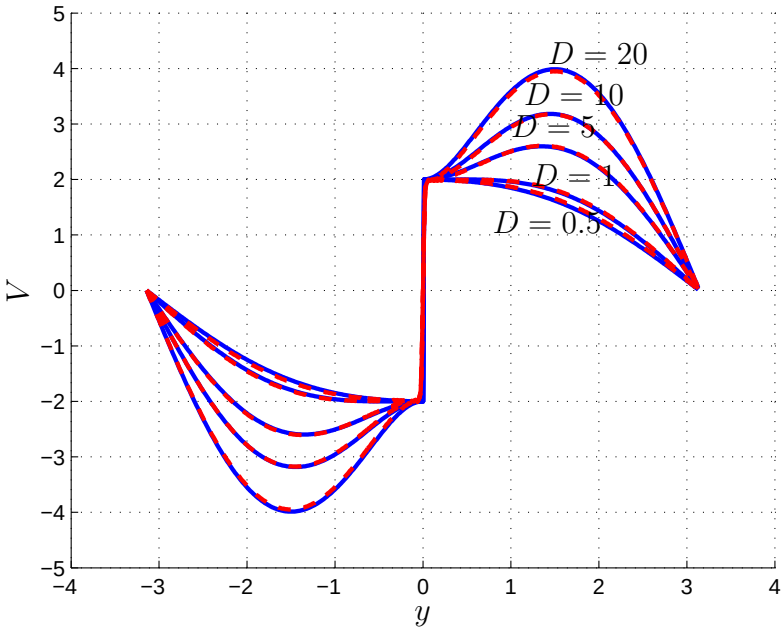
Druhou z metod řízení, kterou v této práci představíme, a jenž rovněž omezuje přesun akustické energie k vyšším harmonickým složkám, je multifrekvenční buzení (viz [**?**], [**?**]). Tato metoda spočívá v tom, že místo abychom rezonátor budili pouze na jedné jeho rezonanční frekvenci, budíme ho na více frekvencích, zejména na dvou. Velký vliv na tvar výsledného spektra nelineární stojaté vlny má volba frekvenčních složek buzení, jejich vzájemný fázový posuv a v neposlední řadě také poměr jejich amplitud.

6.2.1 Analytické řešení

Analyticky budeme řešit případ buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu, který bude vzhledem k prvnímu fázově posunut o π. Opět uvažujeme jednorozměrný akustický rezonátor s jedním pístem v místě $x = L$ (viz obrázek **??**), k jehož popisu opět použijeme nehomogenní Burgersovu rovnici v bezrozměrném tvaru (**??**). Předpoklady pro analytické řešení zavedeme opět ty samé jako v kapitole **??**, tedy ustálený stav a $G^{-1} = 0$, čímž rovnice (**??**) přejde do tohoto tvaru

$$-V\frac{dV}{dy} = \sin(y) + a\sin(2y + \pi), \tag{6.22}$$

kde $a = v_{m2}/v_{m1}$. Nyní analogicky s analytickým řešením buzení na prvním kmitočtu v druhé kapitole levou stranu rovnice upravíme, čímž dostaneme diferenciální rovnici



Obrázek 6.3: Porovnání profilů postupujících vln pro metodu selektivního útlumu získané analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro různé hodnoty parametru D.

prvního řádu řešitelnou metodou separací konstant, jejíž aplikací dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \pm\sqrt{2}\sqrt{\cos(y) + a\cos(2y+\pi) + q} \\ &= \pm 2\sqrt{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) + 2a\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right) + q}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

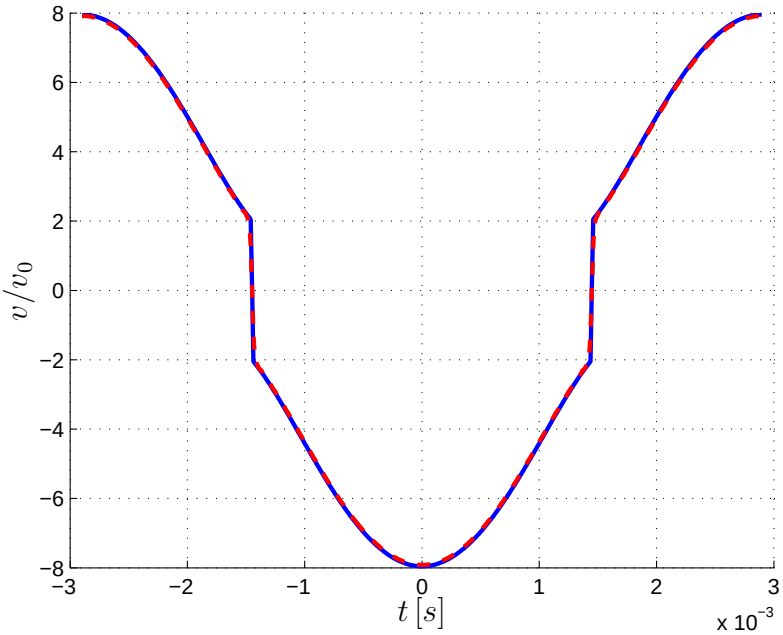
Dle vztahu (**??**) zvolíme $q = 0$, čímž dostaneme

$$V = \pm 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\sqrt{1 + 2a\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}. \tag{6.24}$$

Volbu $q = 0$ můžeme opět podpořit fázovým portrétem, jenž je zachycen na obrázku **??**. Je v něm již vyznačeno červeně řešení (**??**). Je zde vidět, že se naše řešení opět nachází na separatrixe. Analytická řešení pro různé hodnoty parametru a potom zachycuje obrázek **??**.
Výslednou stojatou vlnu bychom opět získali dosazením za $\tau_\pm = t \mp x/c_0$ za τ v nalezeném řešení (**??**) a dosazením do vztahu (**??**). Průběhy stojaté vlny v různých místech rezonátoru jsou zachyceny na obrázku **??**.

6.2.2 Numerické řešení

K numerickému řešení opět využijeme program pro numerickou simulaci za použití nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti.



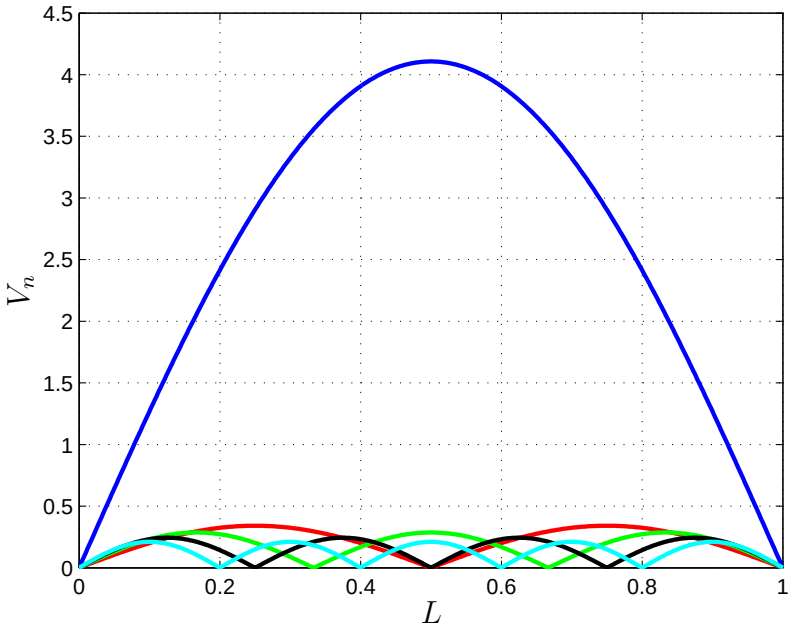
Obrázek 6.4: Porovnání stojatých vln pro metodu selektivního útlumu získaných analyticky (modře) a numerickými metodami (červeně) pro hodnotu parametru $D = 20$ v místě $x = L/2$.

6.2.3 Porovnání analytického a numerického řešení

Nyní opět porovnáme výsledky numerické simulace a analýzy. Nejprve srovnáme profily postupných vln pro různé hodnoty parametru a na obrázku **??**. Numerické řešení má opět o něco nižší amplitudu a pozvolnější ráz v místě $y = 0$ z důvodu volby $G = 60$, jinak co do tvaru uspokojivě kopíruje průběh analytického řešení. Srovnání stojatých vln pro hodnotu parametru $a = 20$ v místě $x = L/2$ zachycuje obrázek **??**.

6.2.4 Rozbor metody

Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro $a = 20$ je zachycena na obrázku **??**. Nahlédnutím zjistíme, že vyšší harmonické složky mají nižší amplitudy než pro případ buzení pouze na prvním rezonančním kmitočtu, viz obrázek **??**. Amplituda první harmonické složky též vzrostla. Budeme-li uvažovat jiný případ, kdy budeme rezonátor budit na jeho prvním a pátém rezonančním kmitočtu se stejným vzájemným fázovým posuvem π a parametrem $a = 20$, bude výsledné spektrum (obrázek **??**) odlišné. Lze zde vidět, že amplituda čtvrté harmonicky složky (černá) oproti předchozímu případu významně vzrostla, zatímco třeba třetí harmonická složka (zelená) téměř úplně vymizela. Pokud bychom buzení ještě jednou modifikovali, a protentokrát uvažovali buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu se vzájemným fázovým posunem o $\pi/2$, dostaneme opět jiné spektrum (obrázek **??**). Nahlédnutím shledáme, že oproti případu, kdy byly budicí kmitočty vzájemně fázově posunuty o π, poklesla velikost amplitudy

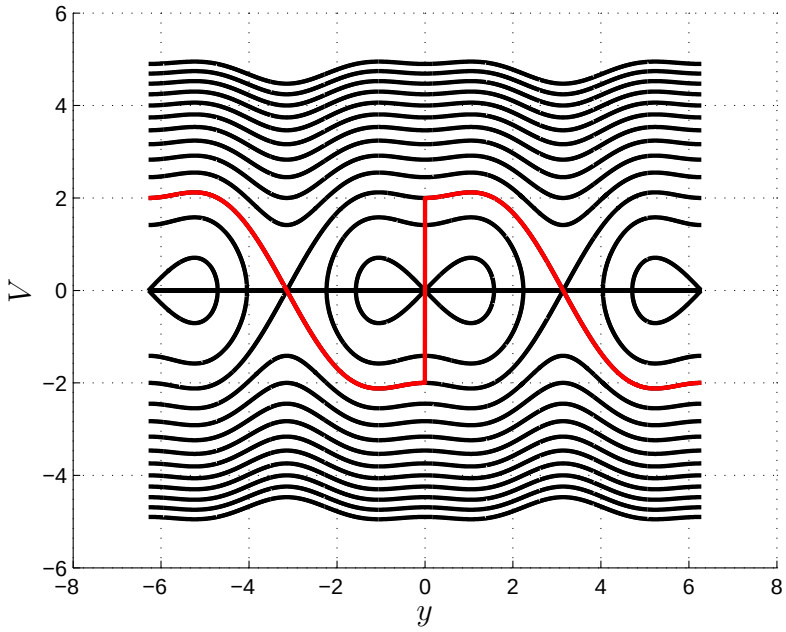


Obrázek 6.5: Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro metodu selektivního útlumu pro hodnotu parametru $D = 20$.

druhé harmonické složky (červená) a amplituda třetí harmonické složky (zelená) v tomto případě vzrostla.
Výsledky tedy naznačují, že pokud rezonátor budíme na více frekvencích, opět se významně naruší kaskádní proces přelévání energie k vyšším harmonickým složkám, podobně jako u metody selektivního útlumu, a tím lze efektivně řídit spektrum nelineární stojaté vlny. Přičemž tvar spektra řízeného metodou multifrekvenčního buzení lze ovlivňovat jak volbou budicích kmitočtů, tak jejich vzájemným fázovým posuvem, tak i poměrem amplitud kmitočtových složek buzení, jenž je zde reprezentován parametrem a.

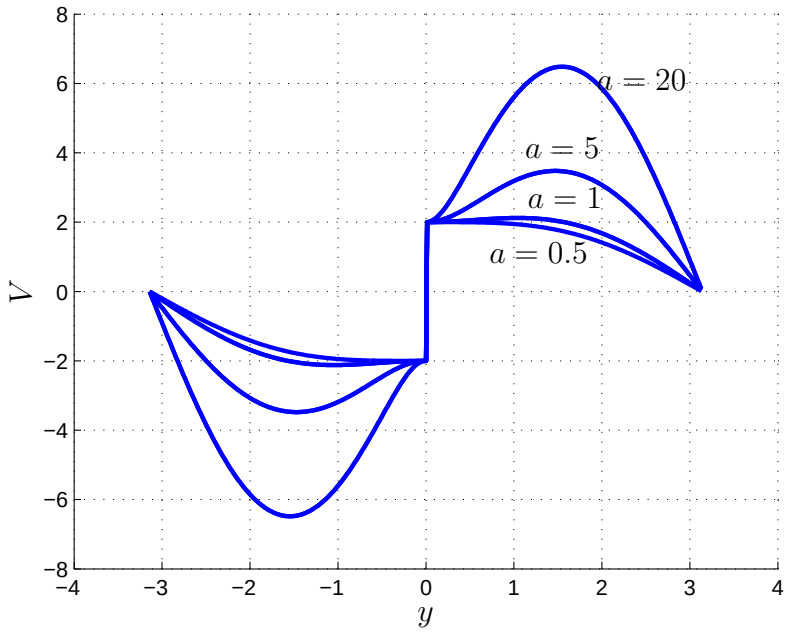
6.3 Buzení dvěma nezávislými písty

Další metodou, kterou lze použít pro omezení kaskádního procesu, je buzení dvěma nezávislými písty. Tato metoda je v podstatě jen mírnou modifikací již představené metody multifrekvenčního buzení, která byla popsána výše. Při multifrekvenčním buzení vybuzujeme pole na více frekvencích za použití jednoho pístu. Stejného efektu lze ovšem dosáhnout i tak, že používáme písty dva, přičemž každý kmitá jen na jedné frekvenci (viz obrázek **??**).
Využijeme-li k popisu zvukového pole uvnitř rezonátoru na obrázku **??** nehomogenní Burgersovy rovnice, bude jediný rozdíl v tom, že okrajová podmínka pro $x = 0$ nebude nulová, ale bude se měnit s časem dle funkce f_1. Výsledná rovnice bude mít ovšem stejný tvar a tudíž bychom z ní získali postupem uvedeným v kapitole věnované multifrekvenčnímu buzení totožné výsledky.

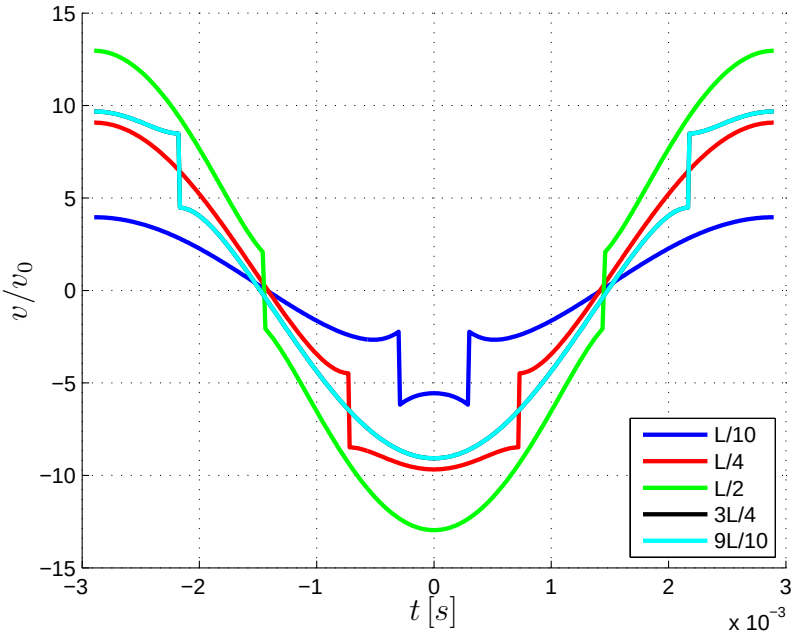


Obrázek 6.6: Fázový portrét pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π pro hodnotu parametru $a = 1$.

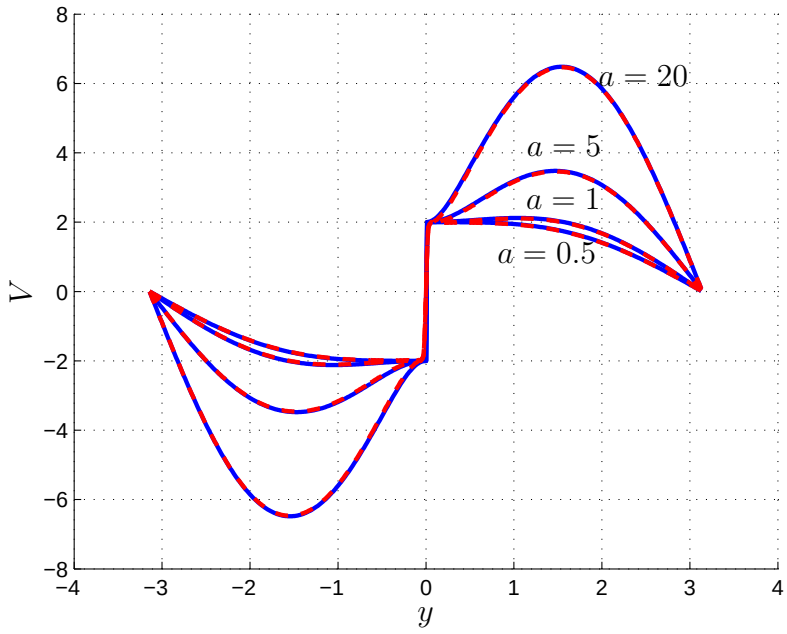
Pokud bychom popisovali systém pomocí Kuzněcovovy rovnice a vybuzené zvukové pole simulovali numericky pomocí postupu uvedeného v kapitole věnované numerickým metodám, použili bychom v programu extrapolace (**??**) na obou stranách rezonátoru. Je zde opět potřeba nadefinovat pro oba písty dvě funkce $X_{P1} = X_{P1}(T)$ a $X_{P2} = X_{P2}(T)$, které budou popisovat měnící se výchylku pístů.



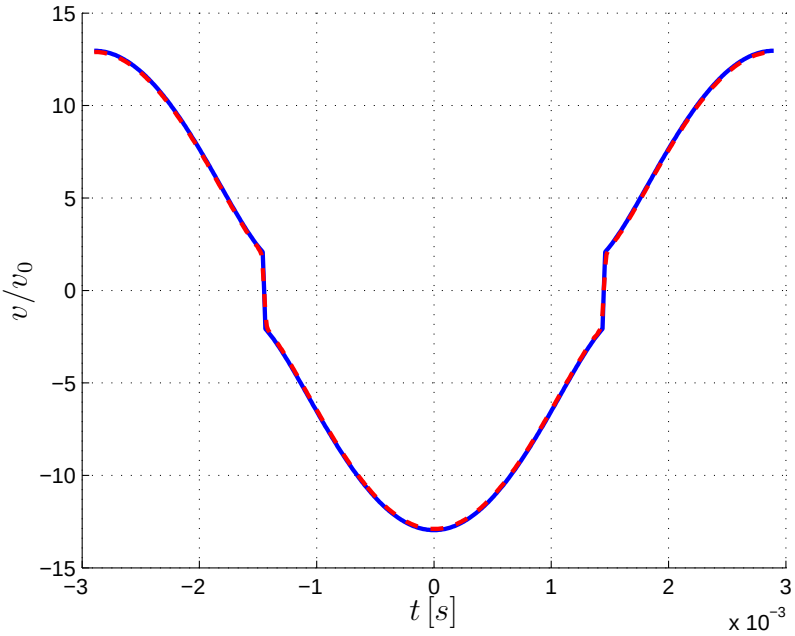
Obrázek 6.7: Analytická řešení pro postupnou vlnu pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π pro různé hodnoty parametru a.



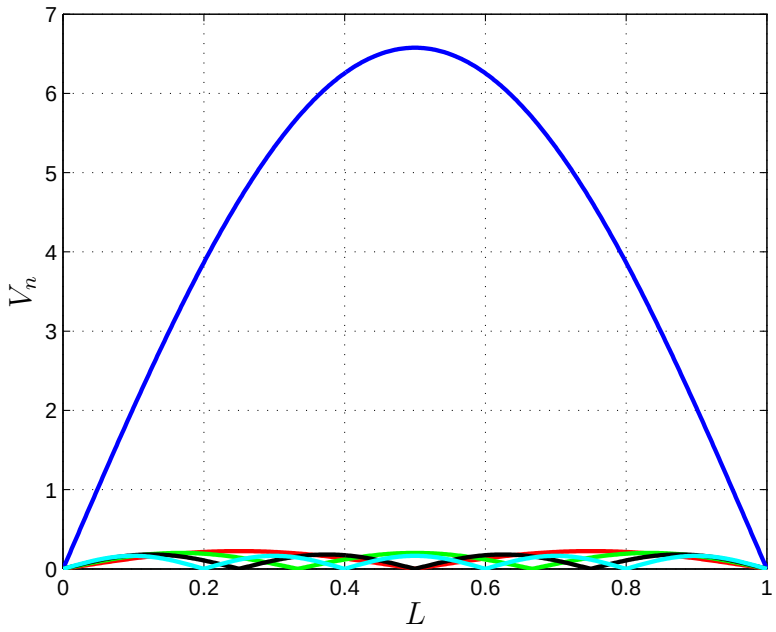
Obrázek 6.8: Průběhy stojaté vlny pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π v různých místech rezonátoru pro hodnotu parametru $a = 20$.



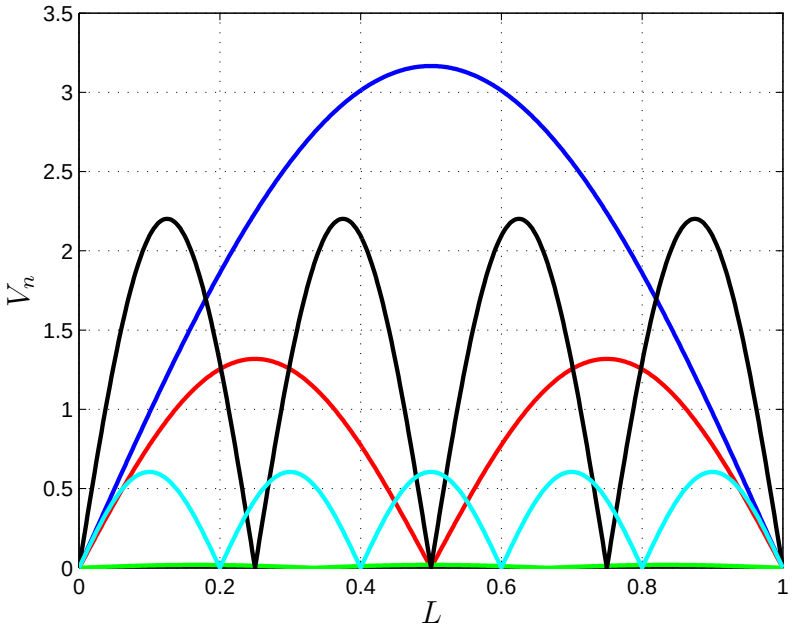
Obrázek 6.9: Porovnání profilů postupných vln pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π získaných analytickými (modře) a numerickými metodami (červeně) pro různé hodnoty parametru a.



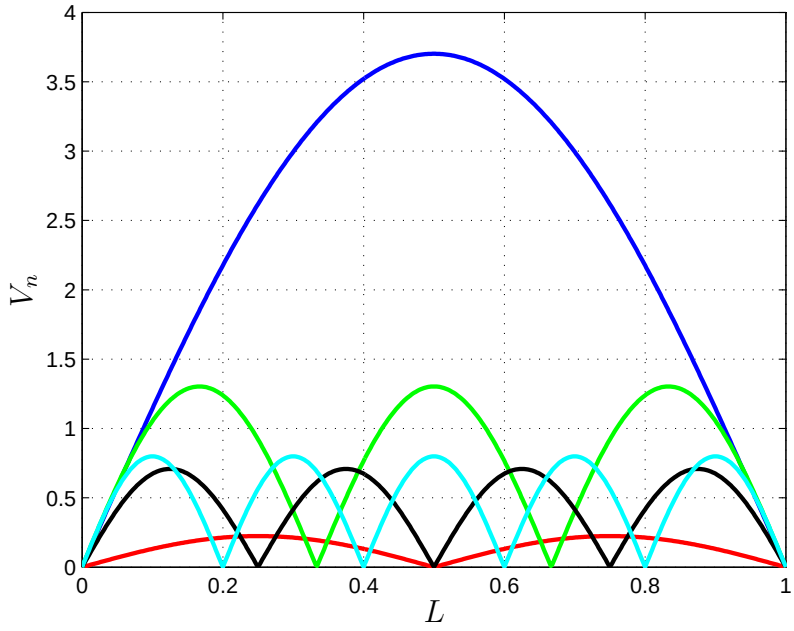
Obrázek 6.10: Porovnání stojatých vln pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π získaných analyticky a numerickými metodami pro $a = 20$ v místě rezonátoru $x = L/2$.



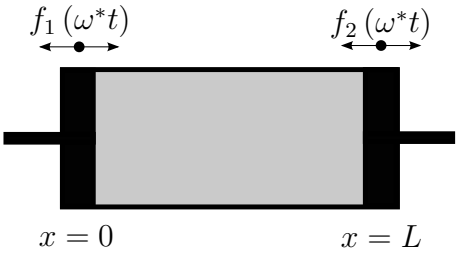
Obrázek 6.11: Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π.



Obrázek 6.12: Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o π.



Obrázek 6.13: Distribuce amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení pro případ harmonického buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu s vzájemným fázovým posuvem o $\pi/2$.



Obrázek 6.14: Akustický rezonátor s dvěma písty v místě $x = 0$ a $x = L$ jejichž výchylku popisují funkce $f_1(\omega^* t)$ a $f_2(\omega^* t)$.

Kapitola 7

Závěr

Díky rozmachu výpočetní techniky, který v posledních letech probíhá, jsme nyní schopni vyšetřovat děje v nelineárních akustických polích daleko snadněji a účinněji než dříve. V důsledku toho se rozšiřují možnosti praktického uplatnění těchto polí. Mezi aplikacemi, které využívají nelineární akustická pole zaujímají důležité místo ty, jenž využívají akustické rezonátory. Tato práce se věnovala vybraným metodám řízení spektra nelineárních stojatých vln vybuzených uvnitř těchto rezonátorů, přičemž jsme uvažovali, že je rezonátor vyplněn plynem. Těmito metodami řízení spektra nelineární stojaté vlny můžeme pozitivně ovlivnit účinnost daného zařízení.
Nejprve byly představeny základní modelové rovnice používané pro popis nelineárních zvukových polích. Byly to Navier-Stokesova pohybová rovnice, rovnice kontinuity, rovnice toku tepla a stavová rovnice. Pro tuto soustavu rovnic není ovšem známo analytické řešení, proto jsme se v této soustavě omezili na členy nejvýše druhého řádu a nadále předpokládali pouze nevírová pole, což nám umožnilo po úpravách dospět k jediné modelové rovnici - Kuzněcovově rovnici. Avšak ani pro tuto rovnici nejsou známa analytická řešení pro fyzikálně zajímavé okrajové podmínky. Omezíme-li se dále na případy jednorozměrných rezonátorů válcového průřezu s dokonale tuhými stěnami, ve kterých neuvažujeme akustickou mezní vrstvu, můžeme zjednodušit Kuzněcovovu rovnici do další modelové rovnice - nehomogenní Burgersovy rovnice.
Po nástinu odvození modelových rovnic jsme se seznámili s obecným postupem analytického řešení nehomogenní Burgersovy rovnice za použití jejího bezrozměrného tvaru. Uvažovali jsme přitom případ harmonického buzení na vlastních kmitočtech rezonátoru s jedním pístem v místě $x = L$, kde L je délka rezonátoru. Tímto obecným postupem jsme pak názorně vyřešili případ buzení na prvním rezonančním kmitočtu pro případ ideálního plynu.
V další části jsme se seznámili s použitými numerickými metodami pro hledání řešení modelových rovnic. První metoda se opírala při popisu nelineárních zvukových polí uvnitř rezonátoru o Kuzněcovovu rovnici. Ta byla převedena to bezrozměrného tvaru a následně upravena na soustavu dvou provázaných diferenciálních rovnic prvního řádu. Tuto soustavu jsme pak numericky integrovali v bezrozměrném čase T pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu. V druhé metodě jsme použili opět nehomogenní Burgersovu rovnici v bezrozměrném tvaru. Předpokládali jsme, že řešení této rovnice a funkce popisující

buzení lze vyjádřit ve tvaru komplexní Fourierovy řady. Dosazením těchto vyjádření do bezrozměrné nehomogenní Burgersovy rovnice jsme po úpravách dostali opět soustavu provázaných M diferenciálních rovnic, kde M je počet uvažovaných prvků Fourierovy řady. Tuto soustavu jsme numericky řešili pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu. Pro numerický výpočet dle prezentovaných numerických metod byly vytvořeny programy v jazyce C, které jsou k nalezení na přiloženém CD. Řešení vypočtená těmito programy byla srovnána a bylo shledáno, že tyto metody vedou ke stejnému výsledku. Pro hledání numerických řešení pro porovnání s analytickými a k rozboru metod řízení spekter byla nadále používána pouze metoda řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti.

Následující část práce byla věnována porovnáním analytických a numerických řešení nehomogenní Burgersovy rovnice pro případ buzení pouze na prvním vlastním kmitočtu rezonátoru. Tato řešení se vzhledem k uvažovanému koeficientu zohledňujícím termoviskózní ztráty $G = 60$ uspokojivě shodovala. Amplituda numerického řešení byla vlivem nenulového G^{-1} oproti analytickému řešení (které platí pro případ ideálního plynu) mírně nižší a ráz pozvolnější[1]. Vedle porovnání profilů postupných a stojatých vln jsme vykreslili distribuci amplitud prvních pěti harmonických složek numerického řešení a shledali, že vyšší harmonické složky mají v poměru k první harmonické složce poměrně velké amplitudy. To je dáno vlivem nelineárního útlumu, který způsobil, že vlna byla postupně zkreslena. Toto zkreslení je doprovázeno právě vznikem vyšších harmonických složek (viz [**?**]). Na těchto vyšších kmitočtech spektra poté dochází rychleji k disipaci akustické energie, což může být pro řadu aplikací nežádoucím jevem.

Další část práce byla již věnována metodám řízení spektra nelineárních stojatých vln. V rámci této práce jsme se zaměřili na základní metody řízení, a sice na metodu selektivního útlumu, multifrekvenčního buzení a na buzení dvěma nezávislými písty.

Metoda selektivního útlumu spočívá v zatlumení druhé harmonické složky nelineární stojaté vlny uvnitř rezonátoru. To ve výsledku vede k výraznému omezení kaskádního procesu, tedy k omezení přesunu akustické energie k vyšším harmonickým složkám, která se namísto toho bude kumulovat v první harmonické složce. Tato metoda byla analyticky vyřešena za použití nehomogenní Burgersovy rovnice v bezrozměrném tvaru pro případy, kdy pro parametr D určující zatlumení druhé harmonické složky platilo, že $D \gg 1$ a $D < 1$. Analytická řešení se opět uspokojivě shodovala s výsledky získané numerickým výpočtem pomocí programu. Po nahlédnutí na distribuci amplitud harmonických složek řešení pro hodnotu parametru $D = 20$ bylo možné vyvodit závěr, že tato metoda skutečně významně narušuje kaskádní proces přelévání energie k vyšším harmonickým složkám. Místo toho se tato energie částečně přelévá na první harmonickou složku, čímž vzroste její amplituda. Jakost rezonátoru se tím pádem zvýší.

Metoda multifrekvenčního buzení spočívá v tom, že rezonátor budíme na více frekvencích, místo na jedné. Analyticky byl vyřešen případ buzení na prvním a druhém rezonančním kmitočtu se vzájemným fázovým posuvem o π, který byl posléze porovnán s numerickým řešením. Shoda byla opět uspokojivě přesná. Distribuce harmonických složek řešení pro hodnotu parametru $a = 20$ (poměr amplitud kmitočtových složek buzení) pro toto buzení

[1] Toto bylo možné pozorovat i při porovnávání řešení u metod řízení, u kterých byl použit též koeficient $G = 60$.

znovu naznačovala na omezení kaskádního procesu přelévání akustické energie k vyšším harmonickým složkám. Amplituda první harmonické složky opět významně vzrostla. Dokonce vzrostla více než u metody selektivního útlumu pro uvažovanou hodnotu parametru $D = 20$. Poté byly prezentovány distribuce amplitud pro další dva případy buzení. První z nich byla pro případ buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu se stejným vzájemným fázovým posuvem, tedy o π. V tomto případě byl pozorován nárůst čtvrté harmonické složky a výrazné omezení amplitudy třetí harmonické složky. Druhý případ byl opět pro případ buzení na prvním a pátém rezonančním kmitočtu, ale pro jiný vzájemný fázový posuv, o $\pi/2$. Po této změně došlo k nárůstu amplitudy třetí harmonické složky a k omezení amplitudy druhé harmonické složky. Při metodě multifrekvenčního buzení tedy můžeme tvar spektra nelineární stojaté vlny ovlivnit jak volbou kmitočtových složek buzení, tak vzájemným fázovým posuvem těchto složek, tak i poměrem jejich amplitud.
Poslední metoda, tedy metoda buzení dvěma nezávislými písty, je jen mírnou modifikací předchozí metody multifrekvenčního buzení. Při této metodě se akorát nevyužívá jednoho pístu buzeného na dvou frekvencích, ale dvou pístu, přičemž každý je buzen na jedné frekvenci.
Metodami řízení prezentovanými v této práci lze ovlivnit tvar spektra nelineární stojaté vlny vybuzené uvnitř akustického rezonátoru. Zařízení využívající akustické rezonátory jsou stále teprve na vzestupu, proto považuji téma řízení nelineárních akustických polí v akustických rezonátorech za téma stále aktuální, kterému stojí za to se věnovat. Jak již bylo několikrát uvedeno, prezentované metody jsou metodami základními. Existuje celá řada dalších. Z těch metod řízení, které zde nebyly prezentovány, můžeme znovu zmínit třeba ty, které využívají rozladění rezonátoru.

Použitá literatura a jiné zdroje

[1] Enflo, B. O., Hedberg, C. M.: *Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids*, Kluwer, New York, 2004.

[2] Rudenko, O. V., Soluyan, S. I.: *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, Consultans Bureau, New York, 1977.

[3] Gusev, V. E.: *Build of forced oscillations in acoustic resonators*, Sov. Phys. Acoust., **30** (2), 1984, 121-125.

[4] Bednařík, M., Koníček, P.: *Asymptotic solutions of the inhomogeneous Burgers equation*, J. Acoust. Soc. Am. **115** (1), 2004, 91 - 98.

[5] Bednařík, M.: *Nelineární vlnové procesy v akustice*, habilitační práce, ČVUT-FEL, Praha, 2006.

[6] Bednařík, M.: *Fyzika 1*, ČVUT-FEL, Praha, 2011.

[7] Rossing, Thomas D.: *Springer Handbook of Acoustics*, Springer Science + Business Media, New York, 2007.

[8] Bednařík, M., Červenka, M., Balek, R.: *Interaction between two nonlinear acoustic resonators*, Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven: Katholieke Universiteit, 2012, 4071-4082.

[9] Rudenko, O., Sobisevich, A. L., Sobisevich, L. E., Hedberg C. M.: *Enhancements of energy and Q-factor of a nonlinear resonator with increase in its losses*, Doklady Physics, **47** (3), 2002, 188 - 191.

[10] Bednařík, M., Červenka, M.: *Modelování intenzivních zvukových polí*, Československý časopis pro fyziku, **58** (6), 2008, 360 - 362.

[11] Bednařík, M., Červenka, M., Koníček, P.: *Parametric excitation of nonlinear standing waves in acoustic resonator*, Ultrasonics Symposium (IUS), Rome, 2009, 1-4.

[12] Červenka, M.: *Numerical Simulation of Two-Dimensional High-Amplitude Acoustic Field in Cylindrical Resonators Using Kuznetsov's Equation*, 19th International Congress on Acoustics, Madrid: Sociedad Espaňola de Acústica, 2007, 1-6.

[13] Kuznetsov, V. P.: *Equation of nonlinear acoustics*, Soviet Physics - Acoustics, **16** (4), 1970, 467.

[14] Navara, M., Němeček, A.: *Numerické metody*, ČVUT - FEL, Praha, 2005.

[15] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000.

[16] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky II*, Prometheus, Praha, 1995.

[17] Bartsh, H.-J.: *Matematické vzorce*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1983.

[18] Holistic Numerical Methods: Runge-Kutta 4th Order Method `http://nm.mathforcollege.com/topics/runge_kutta_4th_method.html`

Příloha

Obsah CD

V tabulce **??** jsou uvedeny názvy a popis všech souborů, které se nacházejí na přiloženém CD.

Název souboru	**Popis**
bp.pdf	bakalářská práce v pdf formátu
main_Kuznecovova_rovnice.c	zdrojový kód programu použitého k řešení Kuzněcovovy rovnice v časové oblasti
main_Burgersova_rovnice.c	zdrojový kód programu použitého k řešení nehomogenní Burgersovy rovnice v kmitočtové oblasti

Tabulka 7.1: Obsah CD